PRVÁ PÍSOMKA

1. Pre každé $p > 0$ a pre každé $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ položme $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Zistite, pre aké hodnoty parametra p je množina $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leqq 1\}$ konvexná.

2. Nech X je množina všetkých komplexných čísel. Potom X je lineárny priestor nad telesom $\mathbb{C}$ všetkých komplexných čísel. Zistite, či množina $\{z \in X : |\Re(z)| \leqq 1 \text{ a } |\Im(z)| \leqq 1\}$ je vyvážená, kde $\Re(z)$ označuje reálnu časť komplexného čísla z a $\Im(z)$ označuje imaginárnu časť komplexného čísla z.

3. Nech A je konvexná množina v lineárnom priestore X. Položme $p_A(x) = \inf\left\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in A\right\}$ pre každé $x \in X$, pričom $\inf \emptyset = +\infty$. Táto funkcia sa volá *Minkowského funkcionál* množiny A. Zistite, či existujú dve navzájom rôzne množiny A, B v lineárnom priestore X, ktoré majú ten istý Minkowského funkcionál.

4. Nech X je lineárny priestor a A je konvexná množina. Bod $a \in A$ nazývame extrémnym bodom množiny A, ak pre každé také $x, y \in A$, že $a = \frac{1}{2}(x + y)$, platí $x = y = a$. Dokážte, že bod $a \in A$ je extrémnym bodom množiny A práve vtedy, keď množina $A - \{a\}$ je konvexná.

Druhá písomka

1. Zistite, či c_0 je uazretý podpriestor priestoru $m = \ell_\infty$. (Strany 24 a 67.)

2. Na priestore $m = \ell_\infty$ definujeme zobrazenie T predpisom $T(\{x_n\}_{n=1}^\infty) = \{\frac{x_n}{n}\}_{n=1}^\infty$.

a) Ukážte, že T je prosté lineárne zobrazenie.

b) Ukážte, že obor hodnôt zobrazenia T je vlastnou podmnožinou priestoru c_0.

c) Zistite, či zobrazenie T je ohraničené (strana 69).

3. Nech μ je Lebesgueova miera na intervale $\langle 1, \infty)$ a nech f je reálna funkcia definovaná na intervale $\langle 1, \infty)$ predpisom $f(x) = \frac{1}{x}$. Zistite pre ktoré čísla $p \geqq 1$ platí $f \in L_p(\langle 1, \infty))$.

4. Nech X je lineárny normovaný priestor s normou $\|\cdot\|$. Definujme funkciu $p : X \to \mathbb{R}$ predpisom

$$p(x) = \frac{\|x\|}{1 + \|x\|}.$$

Funkcia p spĺňa niektoré vlastnosti normy. Zistite ktoré. (Strana 40.)

RIEŠENIE PRÍKLADU Č. 1

Nech $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť v priestore c_0, ktorá konverguje ku $\boldsymbol{x}_\infty \in \ell_\infty$.
Teda každé $\boldsymbol{x}_n$ je postupnosť tvaru $\boldsymbol{x}_n = \{(\boldsymbol{x}_n)_k\}_{k=1}^{\infty}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
\boldsymbol{x}_1: & (\boldsymbol{x}_1)_1, & (\boldsymbol{x}_1)_2, & (\boldsymbol{x}_1)_3, & \dots & \to & 0 \\
\boldsymbol{x}_2: & (\boldsymbol{x}_2)_1, & (\boldsymbol{x}_2)_2, & (\boldsymbol{x}_2)_3, & \dots & \to & 0 \\
\boldsymbol{x}_3: & (\boldsymbol{x}_3)_1, & (\boldsymbol{x}_3)_2, & (\boldsymbol{x}_3)_3, & \dots & \to & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Podobne $\boldsymbol{x}_\infty$ je postupnosť tvaru $\boldsymbol{x}_\infty = \{(\boldsymbol{x}_\infty)_k\}_{k=1}^{\infty}$.
Ukážeme, že $\boldsymbol{x}_\infty \in c_0$, t.j. že $\lim\limits_{k\to\infty} (\boldsymbol{x}_\infty)_k = 0$.

$$\boldsymbol{x}_\infty: \quad (\boldsymbol{x}_\infty)_1, \quad (\boldsymbol{x}_\infty)_2, \quad (\boldsymbol{x}_\infty)_3, \quad \dots \quad \overset{?}{\to} \quad 0$$

Nech $\varepsilon > 0$. Pretože $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}_\infty$, existuje n_0 také, že pre každé $n \geq n_0$ platí $\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_\infty\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$.
Teda (pre $n = n_0$) platí $\|\boldsymbol{x}_{n_0} - \boldsymbol{x}_\infty\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$.
Podľa definície normy $\|\cdot\|_\infty$ máme

$$\|\boldsymbol{x}_{n_0} - \boldsymbol{x}_\infty\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left|(\boldsymbol{x}_{n_0})_k - (\boldsymbol{x}_\infty)_k\right|.$$

Teda pre každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|(\boldsymbol{x}_{n_0})_k - (\boldsymbol{x}_\infty)_k\right| \leq \|\boldsymbol{x}_{n_0} - \boldsymbol{x}_\infty\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pretože $\boldsymbol{x}_{n_0} \in c_0$, máme $\lim\limits_{k\to\infty} (\boldsymbol{x}_{n_0})_k = 0$. Teda existuje k_0 také, že pre každé $k \geq k_0$ platí $\left|(\boldsymbol{x}_{n_0})_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Potom pre každé $k \geq k_0$ platí

$$\left|(\boldsymbol{x}_\infty)_k\right| \leq \left|(\boldsymbol{x}_\infty)_k - (\boldsymbol{x}_{n_0})_k\right| + \left|(\boldsymbol{x}_{n_0})_k\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$