KRIVKOVÉ INTEGRÁLY

(C. A. Clairaut, 1743)

Úvod

Zvoľme v rovine pevný bod O, ktorý nazveme *začiatkom* alebo *pólom.* Ľubovoľnému bodu P možno potom jednoznačne priradiť vektor

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}_P$$

ktorý nazveme *polohovým vektorom* bodu P vzhľadom na bod O.

K určeniu polohy bodu v rovine potrebujeme dva údaje nazývané *súradnice* bodu.

Kartézsku súradnicovú sústavu tvoria dve navzájom kolmé priamky – osi, pretínajúce sa v bode O.

Rovnica krivky v kartézskej sústave je daná buď *explicitne*

$$y = f(x),$$

alebo *implicitne*

$$F(x, y) = 0.$$

Vzťah medzi súradnicami x, y možno zadať aj pomocou parametra

$$x = x(t), \ y = y(t).$$

S takýmto *parametrickým vyjadrením* rovnice krivky sa stretávame napr. v mechanike, kde určujeme závislosť polohových súradníc hmotného bodu na čase t.

Príklady.
Dioklova kissoida:

$$x = \frac{at^2}{1+t^2}, \qquad y = \frac{at^3}{1+t^2}$$

Strofoida:

$$x = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}, \qquad y = \frac{at(1-t^2)}{1+t^2}$$

Descartov list (1638):

$$x = \frac{at}{1+t^3}, \qquad y = \frac{at^2}{1+t^3}$$

Bernoulliho lemniskáta (1694):

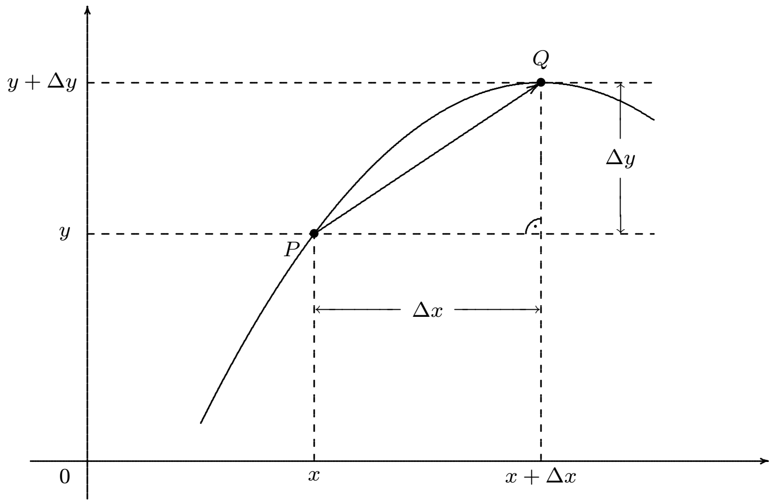
$$x = \frac{at(1+t^2)}{1+t^4}, \qquad t = \frac{at(1-t^2)}{1+t^4}$$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TeX

Klotoida (1744):

$$x = a \,.\, \int_0^t \cos \frac{\pi s^2}{2}\, ds, \qquad y = a \,.\, \int_0^t \sin \frac{\pi s^2}{2}\, ds$$

S úlohou integrácie pozdĺž krivky sa stretávame pri výpočte práce A vykonanej silou $\vec{F}$ na hmotnom bode pohybujúcom sa po krivke K.



Majme dva blízke body P, Q so súradnicami (x, y), $(x+\Delta x, y+\Delta y)$, ležiace na krivke K. Položme

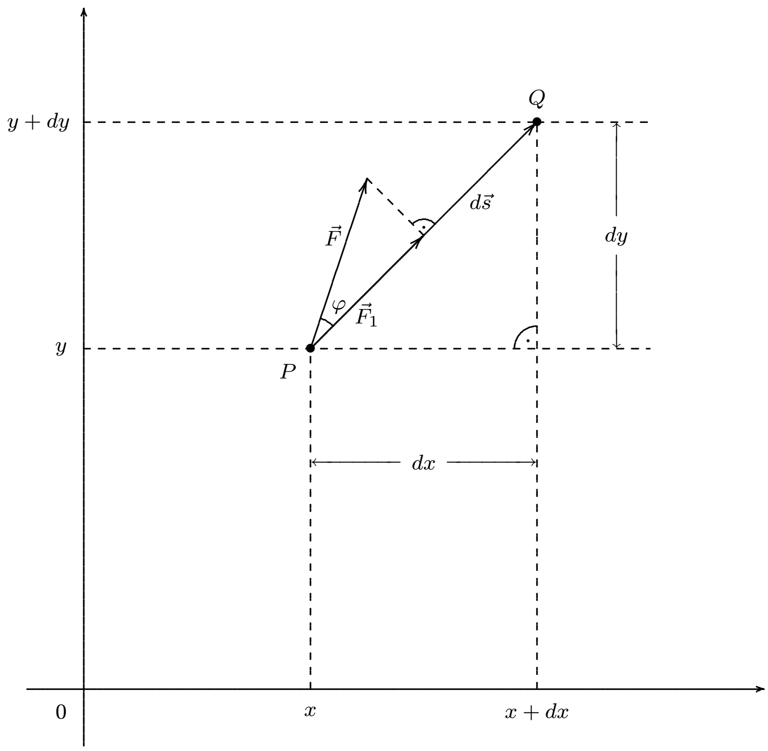
$$\Delta \vec{s} = \overrightarrow{PQ}.$$

Potom platí:

$$|\Delta \vec{s}\,| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

So zmenšujúcim sa $\Delta x \to 0$ bude sečnica prechádzať do dotyčnice. Infinitezimálny element $|d\vec{s}|$ dotyčnice potom ztotožňujeme s dĺžkou oblúka krivky medzi dvomi infinitezimálne blízkymi bodmi (x, y) a $(x+dx, y+dy)$.

V elementárnej fyzike sa práca A, ktorú vykoná sila $\vec{F}$, definuje ako súčin sily a dráhy, ktorú teleso prejde. Tento jednoduchý vzorec platí len vtedy, keď je sila konštantná. Ak sa počas pohybu sila mení, musíme dráhu telesa rozdeliť na také malé časti, aby na každej z nich bolo možné silu $\vec{F}$ považovať za konštantnú.



$$d\vec{s} = dx\,.\,\vec{i} + dy\,.\,\vec{j} \;\Rightarrow\; |d\vec{s}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$
$$dA = |\vec{F}_1|\,.\,|d\vec{s}| = |\vec{F}_1|\,.\,\cos\varphi\,.\,|d\vec{s}| \;\Rightarrow$$
$$A = \int_K \vec{F}\,.\,d\vec{s}.$$

Ak $\vec{F} = (F_x, F_y)$, potom $A = \int_K (F_x\,.\,dx + F_y\,.\,dy)$. Ak krivka K je zadaná parametricky :

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \quad \text{pričom} \quad t \in \langle t_1, t_2\rangle,$$

potom

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \left(F_x \cdot \frac{dx}{dt} + F_y \cdot \frac{dy}{dt} \right) dt\;.$$

(Zopakovať: Ivan, J., Matematika I., str. 543–556.)

Vektorová funkcia skalárneho argumentu

Nech M je neprázdna množina reálnych čísel, $M \subset E_1$, a nech V je množina všetkých vektorov v priestore (v rovine). Zobrazenie

$$\vec{f} : M \to V$$

sa nazýva *vektorová funkcia skalárneho argumentu* alebo *vektorová funkcia jednej reálnej premennej.*

Vektor $\vec{r} = \vec{f}(t)$ je obraz čísla $t \in M$ v zobrazení $\vec{f}$. Budeme ho nazývať *hodnota funkcie* $\vec{f}$ v čísle t. Hodnoty vektorovej funkcie $\vec{f}$ sú teda vektory. V závislosti od charakteru riešených úloh hodnoty $\vec{f}(t)$ možno chápať ako voľné vektory alebo ako viazané vektory s pevne zvoleným začiatkom O.

Ak hodnoty vektorovej funkcie $\vec{f}$ sú polohové vektory vzhľadom na pevne zvolený začiatok O, tak koncové body všetkých týchto vektorov tvoria určitú množinu bodov priestoru (roviny). Táto množina bodov sa nazýva *hodograf* vektorovej funkcie $\vec{f}$. Bod O sa nazýva *pól hodografu.*

Ak zvolíme pravouhlú súradnicovú sústavu $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\,)$, vektor $\vec{r} = \vec{f}(t)$ sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare

$$\vec{r} = x\,.\,\vec{i} + y\,.\,\vec{j} + z\,.\,\vec{k},$$

kde x, y, z sú reálne čísla nazývané *súradnice vektora* $\vec{r}$. Pomocou vektorovej funkcie $\vec{f}$ s definičným oborom M môžeme na množine M definovať tri skalárne funkcie φ, ψ, χ takto

$$\varphi(t) = x, \quad \psi(t) = y, \quad , \chi(t) = z \quad \text{pre } t \in M,$$

kde x, y, z sú súradnice vektora $\vec{f}(t)$. Teda

$$\vec{r} = \vec{f}(t) = \varphi(t)\,.\,\vec{i} + \psi(t)\,.\,\vec{j} + \chi(t)\,.\,\vec{k}.$$

Funkcie φ, ψ, χ nazývame *súradnicovými funkciami.*

Limita, spojitosť a derivácia vektorovej funkcie.

Nech $\mathbb{N}$ je množina všetkých prirodzených čísel a V množina všetkých vektorov v priestore (v rovine). Zobrazenie

$$\vec{f} : \mathbb{N} \to V$$

sa volá *postupnosť vektorov.*

Hodnotu $\vec{f}(n)$ pre $n \in \mathbb{N}$ označujeme symbolom $\vec{a}_n$. Nech začiatočný bod každého člena tejto postupnosti je pevne zvolený začiatok O. Koncový bod vektora $\vec{a}_n$ označme A_n. Teda

$$\vec{a}_n = \overrightarrow{OA_n}$$

Množina $\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ je teda hodograf danej postupnosti vektorov $\vec{f}$. Môže sa stať, že body A_n (pre $n \to \infty$) sa približujú k bodu A. Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ potom nazveme limitou posupnosti $\vec{f}$.

Všimnime si, že platí

$$|\overrightarrow{AA_n}| = |\vec{a}_n - \vec{a}\,|.$$

Vektor $\vec{a}$ nazývame *limitou postupnosti vektorov* $\vec{f}$ a píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}_n = \vec{a}$, ak

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n > n_0 : |\vec{a}_n - \vec{a}\,| < \varepsilon.$$

Hovoríme, že vektorová funkcia $\vec{r}$ má v bode t_0 *limitu* $\vec{r}_0$ a píšeme $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$, ak pre každú číselnú postupnosť $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ takú, že

$$\lim_{n\to\infty} t_n = t_0, \quad t_n \neq t_0, \quad t_n \in M,$$

postupnosť $\{\vec{r}(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k vektoru $\vec{r}_0$.

Hovoríme, že vektorová funkcia $\vec{r}$ je spojitá v bode t_0, ak

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0).$$

Limita (ak existuje)

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$$

sa nazýva *deriváciou* funkcie $\vec{r}$ v bode t_0. Označujeme ju $\vec{r}\,'(t_0)$ alebo $\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right]_{t=t_0}$.

Teória poľa

Názov pole nejakej veličiny sa vo fyzike používa na označenie časti priestoru (alebo celého priestoru), ak každému jej bodu prislúcha práve jedna hodnota tejto veličiny. Ak ide o skalárnu veličinu, pole sa nazýva *skalárne.* V prípade vektorovej veličiny hovoríme o *vektorovom* poli.

Skalárne pole. Ak je každému bodu M priestoru resp. jeho časti jednoznačne priradená nejaká skalárna veličina U, hovoríme, že je definovaná *skalárna funkcia*, ktorú voláme aj *skalárnym poľom* a označujeme ju U. Jej hodnotu v bode M označujeme $U(M)$. Skalárne pole možno definovať aj skalárnou funkciou vektorového argumentu $\vec{r}$ (polohového vektora bodu M vzhľadom na zvolený pól O):

$$U = U(\vec{r}).$$

Ak bod M vyjadríme pomocou súradníc, dostaneme skalárne pole definované funkciou troch premenných

$$U = \varphi(x, y, x).$$

Vektorové pole. Ak je každému bodu M priestoru resp. jeho časti jednoznačne priradený nejaký vektor $\vec{F}$, vtedy hovoríme, že je definovaná *vektorová funkcia bodu*, ktorú označujeme $\vec{F}$ a jej hodnotu v bode M označujeme znakom $\vec{F}(M)$. Namiesto vektorová funkcia bodu hovoríme aj *vektorové pole* (napr. rýchostné pole častíc pohybujúcej sa tekutiny, silové pole elektrickej alebo magnetickej intenzity, atď.). Vektorové pole môžeme definovať vektorovou funkciou vektorovej premennej $\vec{r}$:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}).$$

Derivácia v smere, gradient

Pri skúmaní fyzikálnych dejov v skalárnom poli je potrebné poznať ako sa v ňom menia hodnoty príslušnej skalárnej veličiny U pri prechode od jedného bodu k druhému, t.j. aká je rýchlosť zmeny hodnôt veličiny U v ľubovoľnom smere. S touto otázkou súvisí aj druhá: v ktorom smere je rýchlosť zmeny hodnôt veličiny U najväčšia a ako nájsť tento smer.

Uvažujme skalárne pole U definované na oblasti Ω. Nech X_0 je ľubovoľný vnútorný bod oblasti Ω a $\vec{s}$ ľubovoľný nenulový vektor. Orientovanú polpriamku vychádzajúcu z bodu X_0 a súhlasne rovnobežnú s vektorom $\vec{s}$ označme p. Nech X je ľubovoľný bod oblasti Ω ležiaci na polpriamke p. Podiel

$$\frac{U(X) - U(X_0)}{|\overrightarrow{X_0X}|},$$

ktorého hodnota závisí od polohy bodu X na polpriamke p, charakterizuje strednú (priemernú) rýchlosť zmeny funkcie U. Limita

$$\lim_{X \to X_0} \frac{U(X) - U(X_0)}{|\overrightarrow{X_0X}|},$$

(ak existuje) sa nazýva *derivácia* funkcie U v bode X_0 *v smere* vektora $\vec{s}$. Označíme ju

$$U'_{\vec{s}}(X_0) \quad \text{alebo} \quad \frac{\partial U}{\partial \vec{s}}(X_0).$$

Čím je väčšie číslo $U'_{\vec{s}}(X_0)$, tým rýchlejšie sa menia hodnoty funkcie U pri prechode od bodu X_0 k blízkym bodom v smere vektora $\vec{s}$.

Nech $\vec{s}^{\,0}$ je jednotkový vektor súhlasne rovnobežný s vektorom $\vec{s}$. Potom

$$\vec{s}^{\,0} = \cos\alpha\,.\,\vec{i} + \cos\beta\,.\,\vec{j} + \cos\gamma\,.\,\vec{k},$$

kde α, β, γ sú uhly vektora $\vec{s}$ s vektorami $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Teda rovnice

$$x = x_0 + t\,.\,\cos\alpha, \quad y = y_0 + t\,.\,\cos\beta, \quad z = z_0 + t\,.\,\cos\gamma, \quad t \geq 0,$$

sú parametrickým vyjadrením polpriamky p. Potom

$$U(X) - U(X_0) = U(x,y,z) - U(x_0,y_0,z_0) =$$
$$U(x_0 + t\,.\,\cos\alpha, y_0 + t\,.\,\cos\beta, z_0 + t\,.\,\cos\gamma) - U(x_0,y_0,z_0) = \Phi(t) - \Phi(0),$$

kde Φ je funkcia jednej premennej t definovaná na množine M všetkých tých čísel t, pre ktoré

$$[x_0 + t\,.\,\cos\alpha,\; y_0 + t\,.\,\cos\beta,\; z_0 + t\,.\,\cos\gamma] \in \Omega$$

predpisom

$$\Phi(t) = U(x_0 + t\,.\,\cos\alpha,\; y_0 + t\,.\,\cos\beta,\; z_0 + t\,.\,\cos\gamma).$$

Ďalej platí

$$\left|\overrightarrow{X_0X}\right| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} =$$
$$\sqrt{t^2\cos^2\alpha + t^2\cos^2\beta + t^2\cos^2\gamma} = t,$$

pretože

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Teda

$$\frac{U(X) - U(X_0)}{|\overrightarrow{X_0X}|} = \frac{\Phi(t) - \Phi(0)}{t - 0}.$$

Zrejme platí

$$X \to X_0,\; X \in p \;\Leftrightarrow\; t \to 0+\,.$$

Preto $U'_{\vec{s}}(X_0)$ existuje $\Leftrightarrow$ $\Phi'_+(0)$ existuje a$U'_{\vec{s}}(X_0) = \Phi'_+(0)$. Pritom Φ je zložená funkcia, teda

$$U'_{\vec{s}}(x_0) = \Phi'_+(0) = U'_x(x_0)\,.\,\cos\alpha + U'_y(X_0)\,.\,\cos\beta + U'_z(X_0)\,.\,\cos\gamma.$$

Všimnime si, že pravá strana je skalárny súčin vektora $\vec{s}^{\,0}$ s vektorom $U'_x(X_0)\,.\,\vec{i} + U'_y(X_0)\,.\,\vec{j} + U'_z(X_0)\,.\,\vec{k}$, ktorý nazývame *gradient* funkcie U v bode X_0 a označujeme $\operatorname{grad} U(X_0)$. Potom

$$U'_{\vec{s}}(X_0) = \operatorname{grad} U(X_0)\,.\,\vec{s}^{\,0}\,.$$

Teda $\operatorname{grad} U(X_0)$ je vektor, v smere ktorého je derivácia funkcie U v bode X_0 maximálna a rovná sa veľkosti tohto vektora.
Vektorová funkcia, ktorej definičný obor je množina všetkých tých bodov priestoru, v ktorých je funkcia U diferencovateľná a ktorá každému bodu priestoru priraďuje vektor $\operatorname{grad} U(X)$, sa nazýva *gradient funkcie* U.

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \vec{k}.$$

Divergencia a rotácia

Najvýznamnejšie diferenciálne charakteristiky vektorového poľa $\vec{F}$ sú divergencia a rotácia. Prvá z nich je skalárna a druhá vektorová funkcia.

Nech $\vec{F}$ je vektorové pole definované na oblasti Ω. Nech

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,.\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,.\,\vec{j} + R(x,y,z)\,.\,\vec{k}.$$

Divergencia vektorového poľa $\vec{F}$ sa definuje vzťahom

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Rotácia vektorového poľa $\vec{F}$ sa definuje vzťahom

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cdot \vec{k}.$$

V symbolickom zápise

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Hamiltonov operátor alebo *operátor nabla* sa definuje vzťahom

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k}.$$

S operátorom ∇ pracujeme formálne ako s vektorom, ktorého súradnice sú symboly parciálnych derivácii, pričom pod súčinom niektorého z týchto symbolov s nejakou funkciou rozumieme parciálnu deriváciu tejto funkcie. Teda platí

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} U &= \nabla U \\ \operatorname{div} \vec{F} &= \nabla \,.\, \vec{F} \\ \operatorname{rot} \vec{F} &= \nabla \times \vec{F} \end{aligned}$$

Predstavme si, že hmotný bod v istom časovom intervale J sa pohyboval pod účinkom nejakých síl v priestore. Tento pohyb je úplne určený, ak poznáme polohu pohybujúceho sa bodu v každom časovom okamihu $t \in J$. Poloha bodu je však jednoznačne určená jeho polohovým vektorom vzhľadom na začiatok O. Uvažovaný pohyb je teda určený vektorovou funkciou $\vec{r}$, ktorej obor definície je interval J a ktorej hodnoty $\vec{r}(t)$ pre $t \in J$ sú polohové vektory pohybujúceho sa bodu vzhľadom na bod O. Hodograf tejto vektorovej funkcie s pólom O predstavuje teda dráhu pohybujúceho sa bodu.

Nech $\vec{r}$ je vektorová funkcia definovaná na intervale J. Nech $M \subset J$. Hovoríme, že funkcia $\vec{r}$ je *prostá* na M, ak pre každé dve rôzne čísla $t_1, t_2 \in M$ platí $\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$.

Nech J je ľubovoľný interval. Konečný alebo nekonečný systém uzavretých intervalov $\{\langle t_{k-1}, t_k\rangle\}$ budeme nazývať *rozkladom* intervalu J, ak

1) zjednotením všetkých intervalov je interval J,
2) spoločné body ľubovoľných dvoch intervalov systému môžu byť iba ich koncové body.

Krivkou budeme nazývať hodograf vektorovej funkcie jednej reálnej premennej t, ktorá má tieto vlastnosti

1) jej definičný obor je nejaký interval J,
2) je spojitá na intervale J,
3) existuje taký rozklad $\{\langle t_{k-1}, t_k\rangle\}$ intervalu J, že je na množine $J - \{t_k\}$ prostá.

Špeciálne, ak je funkcia $\vec{r}$ prostá na celom J, hovoríme o *jednoduchej krivke.*

Ak J je ohraničený interval $J = \langle \alpha, \beta\rangle$, krivka

$$K : \vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in \langle \alpha, \beta\rangle$$

sa nazýva *oblúkom.*

Ak $\vec{r}(\alpha) = \vec{r}(\beta)$, hovoríme o *uzavretom oblúku.*

Krivka $\vec{r}(t) = \varphi(t) \,.\, \vec{i} + \psi(t) \,.\, \vec{j} + \chi(t) \,.\, \vec{k} \quad (\alpha \le t \le \beta)$ sa nazýva *po častiach hladkou*, ak existuje taký konečný rozklad $\{\langle t_{k-1}, t_k\rangle\}$ intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$, že na každom z intervalov $\langle t_{k-1}, t_k\rangle$ funkcie φ, ψ, χ majú spojité derivácie, ktoré nie sú súčasne rovné nule.

Z definície krivky K a z definície vektorovej funkcie vyplýva, že každému číslu $t \in J$ patrí práve jeden bod krivky K, a to koncový bod polohového vektora $\vec{r}(t)$. Označme tento bod $\mathcal{R}(t)$.

Nech $\vec{r} = \vec{r}(t)$ je parametrizácia krivky K. Ak parameter t interpretujeme ako čas, opisuje táto parametrizácia určitý pohyb hmotného bodu po krivke K. Ak $t_1 < t_2$, tak pohybujúci sa bod sa dostane najprv do polohy $\mathcal{R}(t_1)$ a potom do polohy $\mathcal{R}(t_2)$. Teda pri takomto pohybe bodu po krivke K je bod $\mathcal{R}(t_1)$ pred bodom $\mathcal{R}(t_2)$. Označíme to $\mathcal{R}(t_1) \prec \mathcal{R}(t_2)$. Bod môže opísať tú istú krivku aj tak, že sa bude pohybovať po nej opačným smerom. Vidíme teda, že parametrizácia $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in J$ určuje dve navzájom opačné usporiadania množiny všetkých jej bodov. Usporiadanie bodov krivky K podľa predpisu

$$\mathcal{R}(t_1) \prec \mathcal{R}(t_2) \Longleftrightarrow t_1 < t_2$$

sa nazýva *usporiadanie súhlasné s parametrizáciou krivky.*

Usporiadanie bodov krivky podľa predpisu

$$\mathcal{R}(t_1) \prec \mathcal{R}(t_2) \Longleftrightarrow t_1 > t_2$$

sa nazýva *usporiadanie nesúhlasné s parametrizáciou krivky.*

Krivka K spolu s jedným z týchto dvoch usporiadaní jej bodov sa nazýva *orientovaná krivka.* Zvolené usporiadanie krivky sa volá *orientácia krivky.*

Krivkový integrál druhého druhu

Nech $\vec{F}$ je vektorové pole, ktorého definičný obor obsahuje orientovanú po častiach hladkú krivku K so začiatočným bodom A a koncovým bodom B. Nech $D = \{X_0, X_1, \ldots, X_r\}$, kde $A = X_0 \prec X_1 \prec X_2 \prec \cdots \prec X_r = B$ je ľubovoľné delenie krivky K. Na každom čiastkovom oblúku $\overset{\frown}{X_{i-1}X_i}$ si zvoľme ľubovoľný bod $\tilde{X}_i$. Číslo

$$S_{\vec{F}}(D) = \sum_{i=1}^{r} \vec{F}(\tilde{X}_i) \,.\, \Delta\vec{r}_i,$$

kde $\Delta\vec{r}_i$ je vektor ležiaci na dotyčnici krivky K v bode $\tilde{X}_i$, majúci dĺžku rovnú dĺžke oblúka $\overset{\frown}{X_{i-1}X_i}$ a ktorý je orientovaný súhlasne s daným oblúkom, sa volá *integrálny súčet* poľa $\vec{F}$ na krivke K pre delenie D a daný výber bodov $\tilde{X}_i$.

Číslo $\nu(D) = \max\limits_{1 \le i \le r} \{\,\text{dĺžka oblúka } \overset{\frown}{X_{i-1}X_i}\,\}$ sa volá *norma delenia D.* Postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ krivky K sa volá normálna, ak $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$. Ku každej normálnej postupnosti $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení krivky K patrí nekonečne veľa postupností integrálnych súčtov. Ak všetky konvergujú k číslu I, hovoríme, že vektorové pole $\vec{F}$ je *integrovateľné* na krivke K a číslo I sa volá *krivkový integrál druhého druhu.* Označíme ho

$$\int_K \vec{F}(X) \,.\, d\vec{r}, \text{ resp. } \int_K \vec{F} \,.\, d\vec{r}.$$

Ak K je uzavretá orientovaná krivka, zvyčajne sa používa označenie

$$\oint_K \vec{F} \,.\, d\vec{r}.$$

Veta 1. *Nech K je orientovaná po častiach hladká krivka parametrizovaná funkciou*

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \ t \in \langle \alpha, \beta \rangle$$

. Nech $\vec{F}$ je vektorová funkcia definovaná na krivke K. Potom

$$\int_K \vec{F}(X) \,.\, d\vec{r} = \pm \int_\alpha^\beta \vec{F}[\vec{r}(t)] \,.\, \vec{r}\,'(t)\, dt,$$

pričom krivkový integrál vľavo existuje práve vtedy, keď existuje integrál vpravo. Znamienko "+" platí, ak je krivka orientovaná súhlasne a "-" ak nesúhlasne s daným parametrickým vyjadrením.

Ak prejdeme k súradniciam, posledný vzorec má tvar

$$\int_K \vec{F} \,.\, d\vec{r} = \pm \int_\alpha^\beta \left[P\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big).\varphi'(t) + Q\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big).\psi'(t) + R\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big).\chi'(t)\right] dt.$$

Nezávislosť krivkového integrálu od integračnej cesty

Nech $\vec{F}$ je vektorové pole spojité na oblasti Ω. Hovoríme, že krivkový integrál funkcie F *nezávisí od integračnej cesty*, ak pre ľubovoľné dve orientované po častiach hladké krivky K_1, K_2, ktoré ležia v oblasti Ω a majú totožné začiatočné a koncové body, platí

$$\int_{K_1} \vec{F} \,.\, d\vec{r} = \int_{K_2} \vec{F} \,.\, d\vec{r}\,.$$

Veta 2. *Nech vektorové pole $\vec{F}$ je spojité na oblasti Ω. Krivkový integrál funkcie $\vec{F}$ nezávisí od integračnej cesty na Ω práve vtedy, keď sa krivkový integrál funkcie $\vec{F}$ po ľubovoľnej uzavretej po častiach regulárnej krivke rovná nule.*

Ak je skalárna funkcia U diferencovateľná na Ω, skalárnemu poľu U patrí vektorové pole $\operatorname{grad} U$. Takéto vektorové pole sa volá *potenciálové*. Samotná funkcia U sa volá potenciál poľa $\vec{F} = \operatorname{grad} U$.

Veta 3. *Krivkový integrál nezávisí od integračnej cesty práve vtedy, ak vektorové pole je potenciálové. Ak U je potenciál poľa $\vec{F}$, tak pre ľubovoľnú po častiach hladkú krivku K v Ω so začiatočným bodom A a koncovým bodom B platí*

$$\int_{K} \vec{F} \,.\, d\vec{r} = U(B) - U(A).$$

Veta 4. *Nech F má na Ω spojité parciálne derivácie prvého rádu. Nutnou podmienkou na to, aby pole $\vec{F}$ bolo potenciálové je, aby v každom bode oblasti Ω platilo*

$$rot\,\vec{F} = \vec{0}.$$

Ak oblasť Ω je jednoducho súvislá, táto podmienka je aj postačujúca.

Krivkový integrál prvého druhu

Nech f je skalárna funkcia n premenných ($n = 2$ alebo $n = 3$) a nech jej definičný obor obsahuje orientovanú krivku K so začiatočným bodom A a koncovým bodom B. Nech $D = \{X_0, X_1, X_2, \dots, X_r\}$, kde $A = X_0 \prec X_1 \prec X_2 \prec \cdots \prec X_r = B$ je ľubovoľné delenie krivky K. Na každom čiastkovom oblúku $\overset{\frown}{X_{i-1}X_i}$ delenia D zvoľme ľubovoľný bod $\tilde{X}_i$ a utvorme súčin $f(\tilde{X}_i) \,.\, \Delta s_i$, kde Δs_i je dĺžka tohto oblúka. *Integrálny súčet* sa definuje nasledovne

$$S_f(D) = \sum_{i=1}^{r} f(\tilde{X}_i) \,.\, \Delta s_i\,.$$

Ak všetky prípustné postupnosti $\{S_f(D_n)\}$ integrálnych súčtov funkcie f konvergujú k číslu I, hovoríme, že f je *integrovateľná* na krivke K a číslo I voláme *krivkový integrál prvého druhu.*

Veta 5. *Nech orientovaná, po častiach hladká krivka K so začiatočným bodom A a koncovým bodom B je časťou definičného oboru funkce f. Nech f je po častiach spojitá na krivke K. Potom platí*

1) *f je integrovateľná na krivke K,*
2) *ak $\vec{r} = \vec{r}(t), t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ je parametrizácia krivky K, tak*

$$\int_K f(X)\, ds = \int_\alpha^\beta f(\vec{r}(t))\,.\,|\vec{r}\,'(t)|\, dt,$$

kde $f(\vec{r}(t)) = f(\mathcal{R}(t))$.

Ak prejdeme k súradniciam, posledný vzorec má tvar

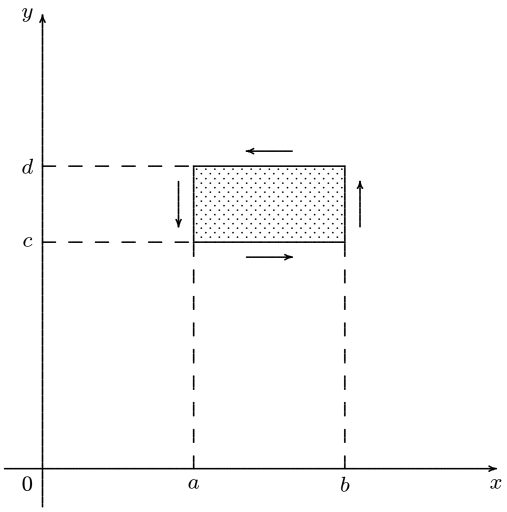
$$\int_K f(x,y,z)\, ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\,.\,\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt.$$

Greenova veta

Greenova formula:

$$\oint_K \vec{F}\,.\,d\vec{r} = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Dôkaz:



1) Oblasť G je obdĺžnik $a \le x \le b$, $c \le y \le d$. Potom

$$\oint_K = \int_{K_1} + \int_{K_2} - \int_{K_3} - \int_{K_4},$$

kde

K_1: $x = t$, $y = c$, $a \le t \le b$
K_2: $x = b$, $y = t$, $c \le t \le d$
K_3: $x = t$, $y = d$, $a \le t \le b$
K_4: $x = a$, $y = t$, $c \le t \le d$

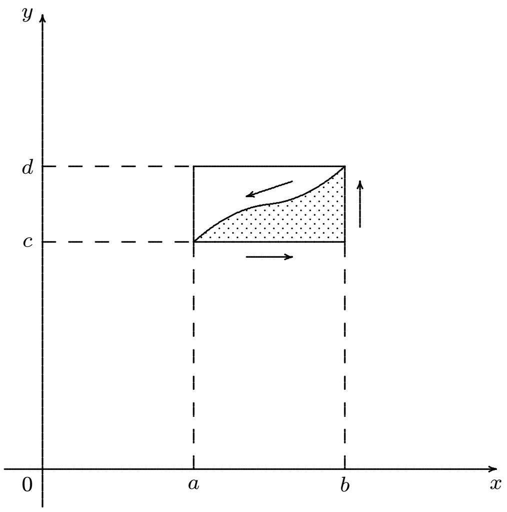
Teda platí:

$$\int_{K_1} \vec{F} \,.\, d\vec{r} = \int_a^b P(t,c)\, dt, \qquad \int_{K_2} \vec{F} \,.\, d\vec{r} = \int_c^d Q(b,t)\, dt,$$
$$\int_{K_3} \vec{F} \,.\, d\vec{r} = \int_a^b P(t,d)\, dt, \qquad \int_{K_4} \vec{F} \,.\, d\vec{r} = \int_c^d Q(a,t)\, dt.$$

Pravá strana má tvar:

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy =$$
$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x}\, dxdy - \iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy =$$
$$\int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx \right) dy - \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial P}{\partial y}\, dy \right) dx =$$
$$\int_c^d [Q(x,y)]_a^b dy - \int_a^b [P(x,y)]_c^d dx =$$
$$\int_c^d [Q(b,y) - Q(a,y)] dy - \int_a^b [P(x,d) - P(x,c)] dx =$$
$$\int_c^d Q(b,y)\, dy - \int_c^d Q(a,y)\, dy - \int_a^b P(x,d)\, dx + \int_a^b P(x,c)\, dx\,.$$

2) Oblasť G má tvar: $a \le x \le b$, $c \le y \le \lambda(x)$, kde λ je spojitá a rastúca funkcia na intervale $\langle a, b \rangle$, $\lambda(a) = c$, $\lambda(b) = d$.



Potom

$$\oint_K = \int_{K_1} + \int_{K_2} - \int_{K_3},$$

kde

K_1: $x = t$, $y = c$, $a \le t \le b$
K_2: $x = b$, $y = t$, $c \le t \le d$
K_3: $x = t$, $y = \lambda(t)$, $a \le t \le b$

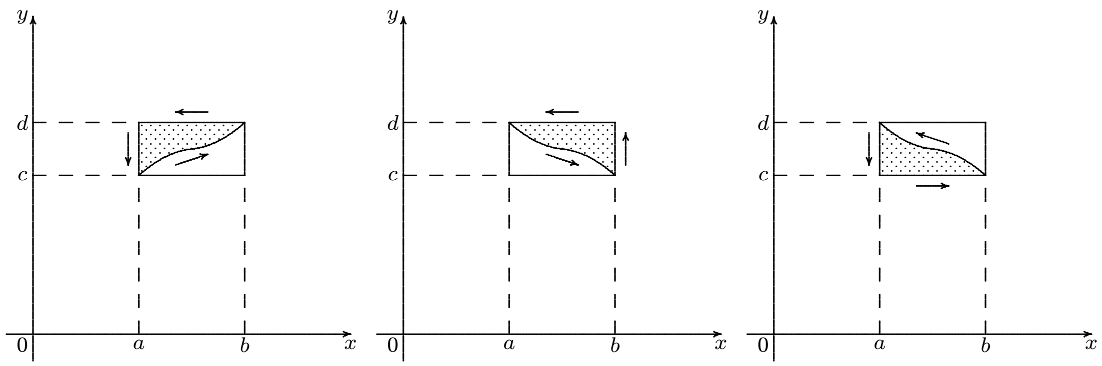
Teda platí:

$$\int_{K_1} \vec{F} \,.\, d\vec{r} = \int_a^b P(t,c)\, dt, \qquad \int_{K_2} \vec{F} \,.\, d\vec{R} = \int_c^d Q(b,t)\, dt$$
$$\int_{K_3} \vec{F} \,.\, d\vec{r} = \int_a^b P(t,\lambda(t))\, dx + \int_a^b Q(t,\lambda(t)) \,.\, \lambda'(t)\, dt$$

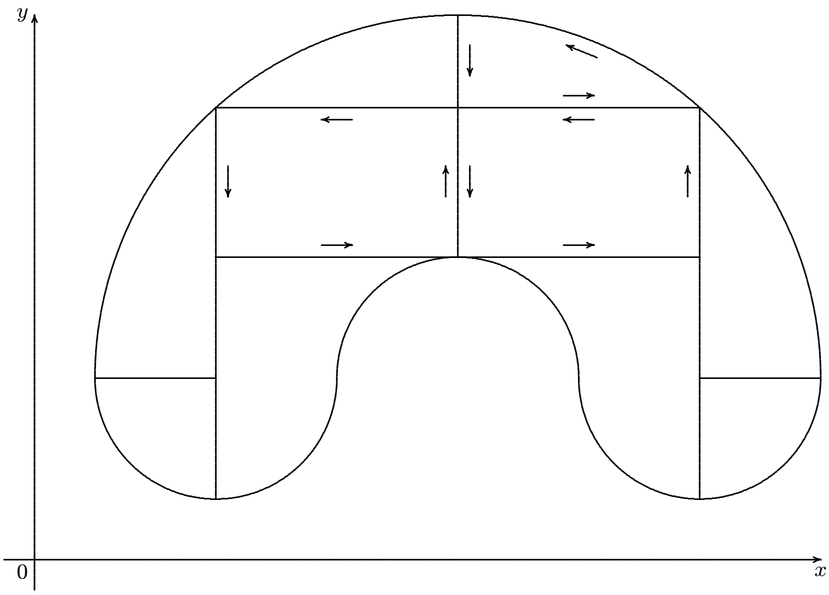
Pravá strana má tvar:

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy =$$
$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x}\, dxdy - \iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy =$$
$$\int_c^d \left(\int_{\lambda^{-1}(y)}^b \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx \right) dy - \int_a^b \left(\int_c^{\lambda(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy \right) dx =$$
$$\int_c^d Q(b,y)\, dy - \int_c^d Q(\lambda^{-1}(y),y)\, dy - \int_a^b P(x,\lambda(x))\, dx + \int_a^b P(x,c)\, dx.$$

3) Ak oblasť tvaru 2) (ako tuhé teleso) otočíme okolo počiatku postupne o uhly $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, dostaneme ešte tri typy oblastí, ktoré spolu s oblasťami tvaru 1) a 2) nazývame *oblasti typu* Δ. Analogicky ako v 2) sa ukáže, že Greenova veta platí pre oblasti typu Δ.



4) **Greenova veta:** Nech G je jednoducho súvislá oblasť, ktorá je konečným zjednotením oblastí typu Δ. Nech vektorová funkcia $\vec{F} = P(x,y) \,.\, \vec{i} + Q(x,y) \,.\, \vec{j}$ má na G spojité parciálne derivácie podľa x a podľa y. Potom platí Greenova formula, kde K je kladne orientovaná uzavretá krivka, ktorá je hranicou oblasti G.



5) Greenova veta platí aj za všeobecnejších predpokladov. Dá sa dokázať, že platí pre každú jednoducho súvislú oblasť, ktorá je ohraničená uzavretou, jednoduchou a po častiach hladkou krivkou.

Aplikácie krivkových integrálov

Pomocou Greenovej vety môžeme odvodiť vzorec na výpočet plošného obsahu rovinnej oblasti D ohraničenej jednoduchou uzavretou po častiach hladkou krivkou K:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \oint_K x\,dy - y\,dx.$$

Dĺžka krivky K je

$$l = \int_K ds.$$

Hmotnosť krivky K je

$$m = \int_K \mu(x,y,z)\,ds\,,$$

kde $\mu = \mu(x,y,z)$ je lineárna hustota v ľubovoľnom bode krivky K.

Súradnice ťažiska $T = (\xi, \eta, \zeta)$ sú:

$$\xi = \frac{1}{m} \cdot \int_K x\,.\,\mu(x,y,z)\,ds \quad \eta = \frac{1}{m} \cdot \int_K y\,.\,\mu(x,y,z)\,ds \quad \zeta = \frac{1}{m} \cdot \int_K z\,.\,\mu(x,y,z)\,ds$$

kde integrály v týchto vzorcoch sú príslužné statické momenty.
Nech silové pole je dané funkciou $\vec{F}(x,y,z)$. Potom práca A tohto poľa po krivke K je:

$$A = \int_K \vec{F}(x,y,z)\,.\,d\vec{s}.$$