Lindelöfova veta

Veta. *Každé otvorené pokrytie separabilného metrického priestoru má najviac spočítateľné podpokrytie.*

Dôkaz. Nech H je najviac spočítateľná hustá podmnožina priestoru X. Nech

$$\mathcal{B} = \{B(x,r), x \in H, r \in \mathbb{Q}\}$$

je (najviac spočítateľný) systém otvorených gulí v priestore X.

Najskôr ukážeme, že ak $G \subset X$ je otvorená množina obsahujúca bod $x_0 \in X$, potom existuje $B \in \mathcal{B}$ také, že

$$x_0 \in B \subset G.$$

Pretože G je otvorená, existuje $\delta > 0$ také, že $B(x_0, \delta) \subset G$. Pretože H je hustá v X, existuje $x \in H \cap B(x_0, \frac{\delta}{4})$. Zrejme $d(x_0, x) < \frac{\delta}{4}$. Nech $r \in \mathbb{Q}$ je také, že $\frac{\delta}{4} < r < \frac{\delta}{2}$. Pretože $d(x_0, x) < \frac{\delta}{4} < r$, platí $x_0 \in B(x,r)$. Ukážeme, že $B(x,r) \subset B(x_0,\delta)$. Nech $z \in B(x,r)$. Potom $d(x,z) < r$, teda

$$d(x_0, z) \leq d(x_0, x) + d(x, z) < r + r < \delta,$$

odkiaľ $z \in B(x_0, \delta)$. Stačí položiť $B = B(x,r)$.

□

Nech $\mathcal{G}$ je otvorené pokrytie priestoru X. Položme

$$\mathcal{B}^* = \{B \in \mathcal{B} : \text{ existuje } G \in \mathcal{G} \text{ také, že } B \subset G\}.$$

Zrejme $\mathcal{B}^*$ je najviac spočítateľný systém otvorených gulí v priestore X. Pre každé $B \in \mathcal{B}^*$ vyberme jedno také $G \in \mathcal{G}$, pre ktoré $B \subset G$. Označme ho G_B. Zrejme $B \subset G_B$. Položme $\mathcal{G}^* = \{G_B : B \in \mathcal{B}^*\}$.

Ukážeme, že $\mathcal{G}^*$ je pokrytie priestoru X. Nech $x \in X$. Pretože $\mathcal{G}$ je pokrytie priestoru X, existuje $G \in \mathcal{G}$ také, že $x \in G$. Ako sme ukázali vyššie, existuje $B \in \mathcal{B}$ také, že $x \in B \subset G$. Odtiaľ ľahko vidieť, že $B \in \mathcal{B}^*$. Zrejme $x \in B \subset G_B$. Odtiaľ vyplýva, že

$$x \in \bigcup \mathcal{G}^*.$$

□□

Ernst Leonard Lindelöf, (7 March 1870 - 4 June 1946) was a Finnish topologist.