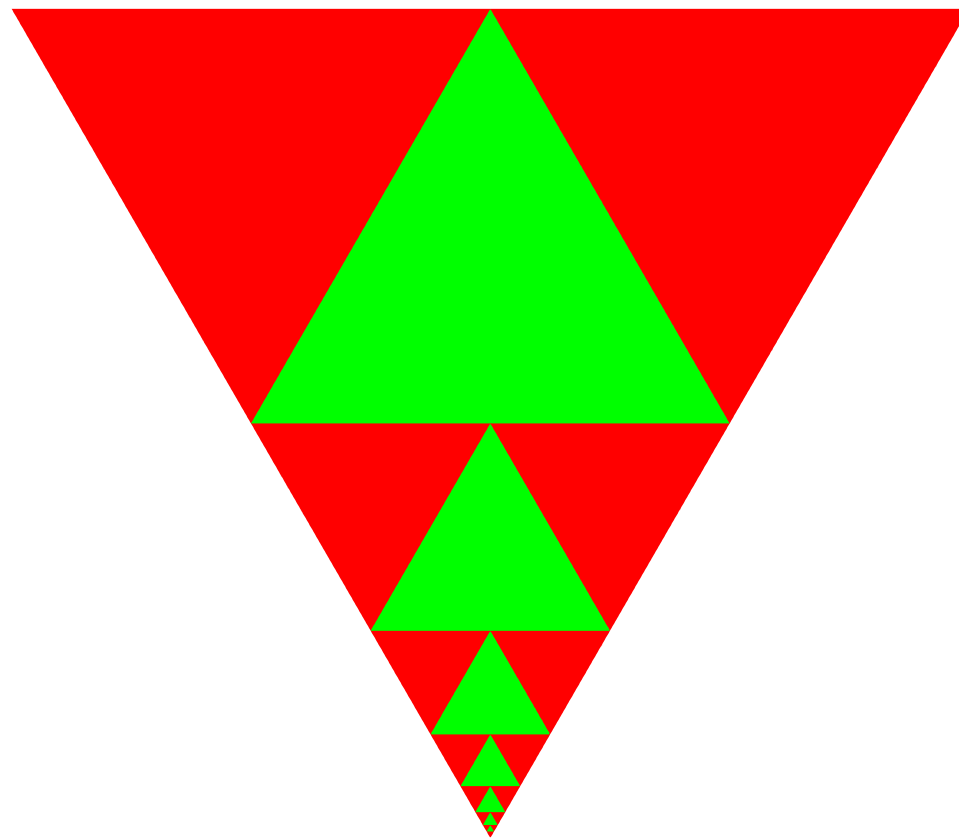
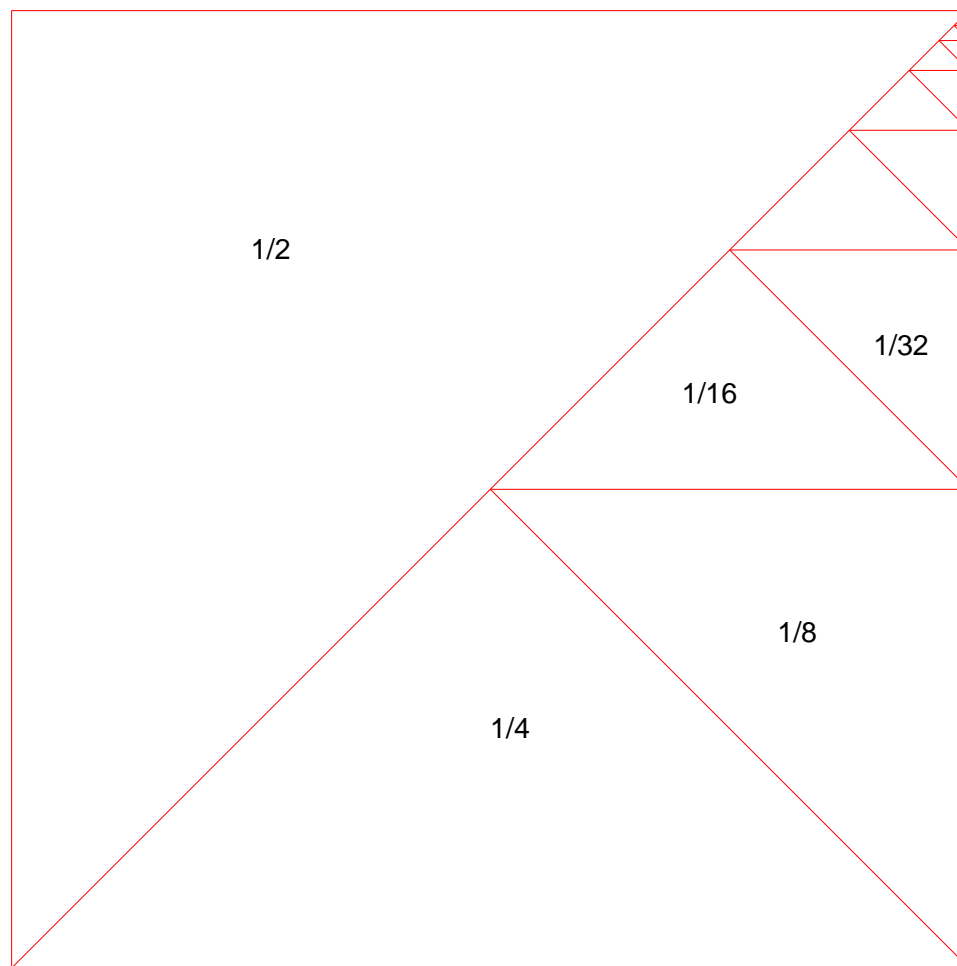


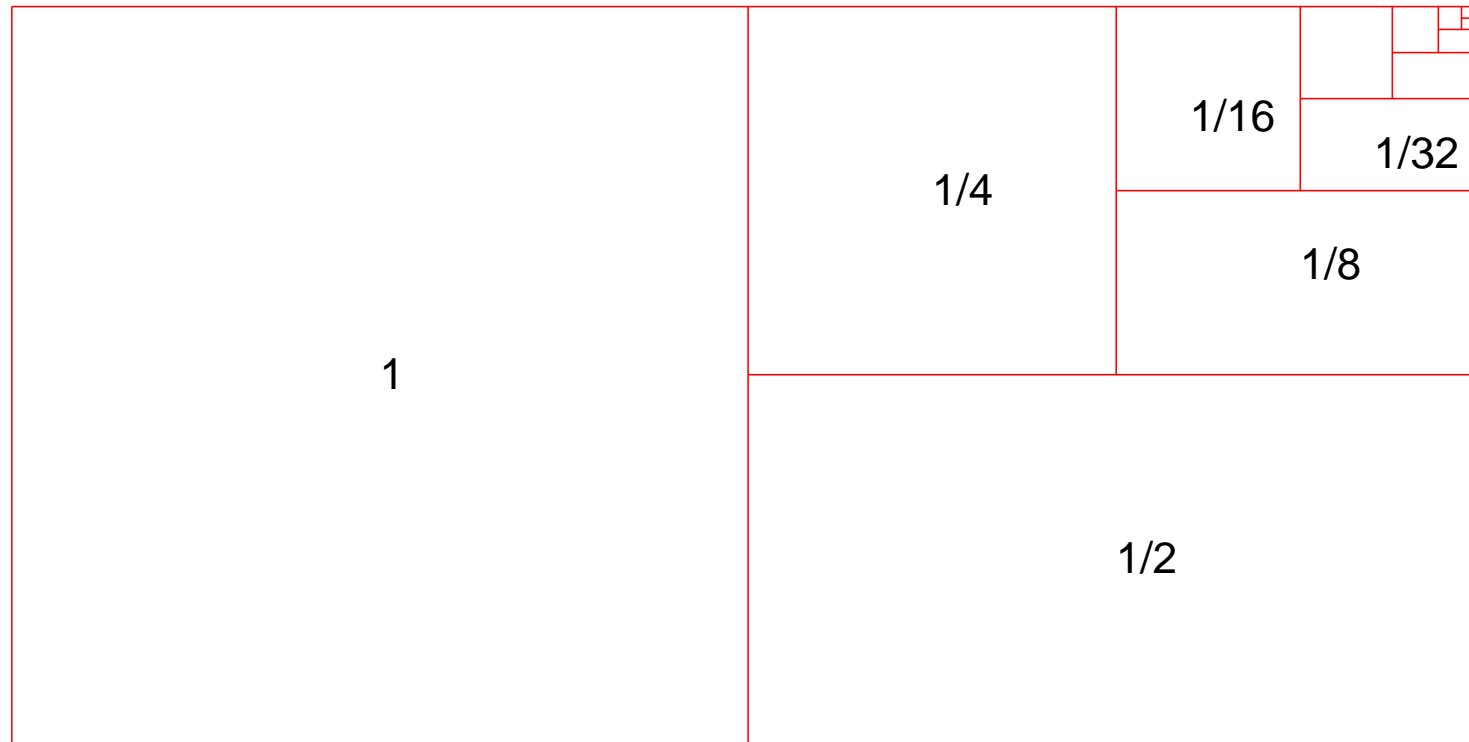
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{1}{3}$$



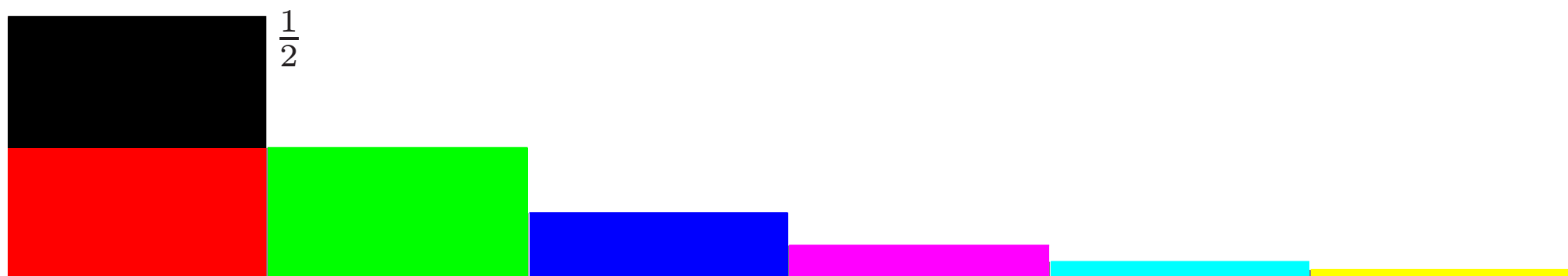
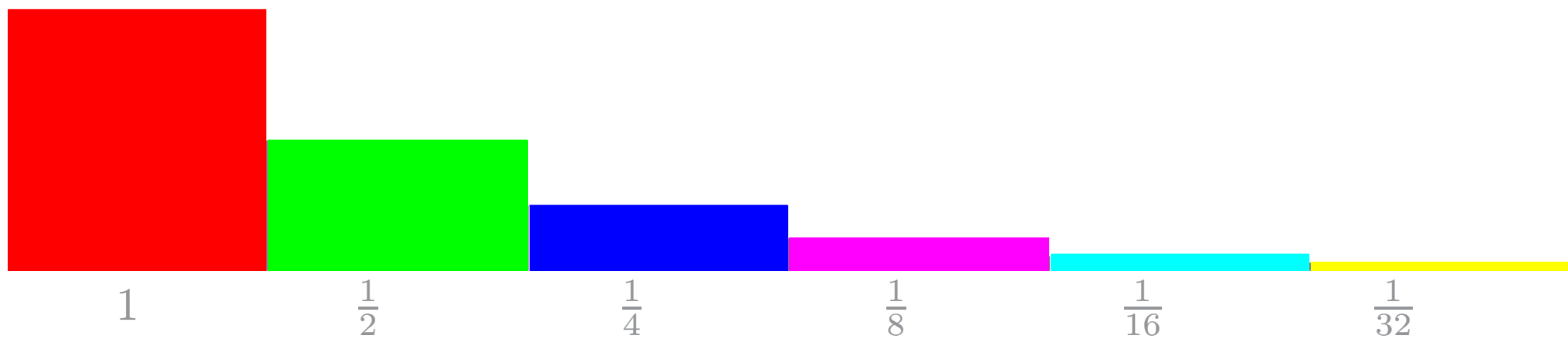
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{1}{3}$$

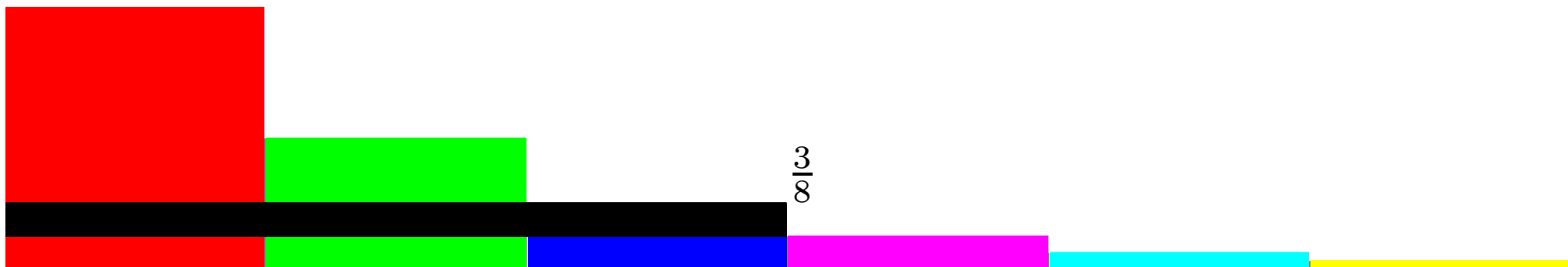
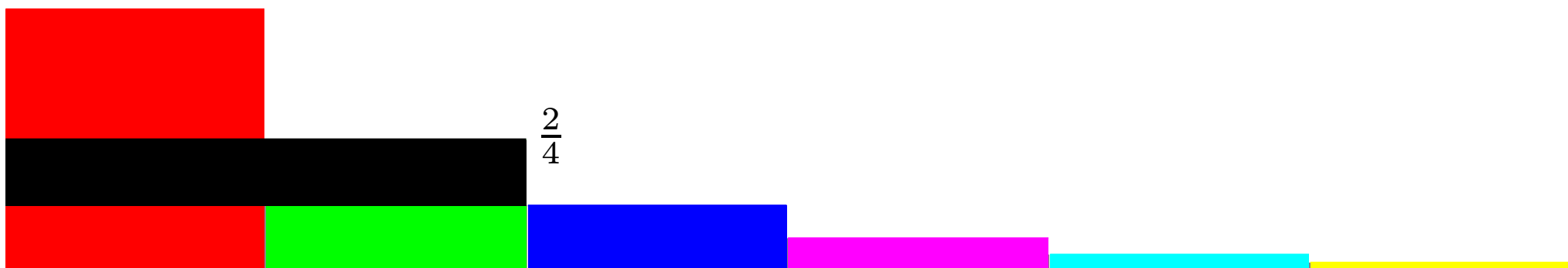


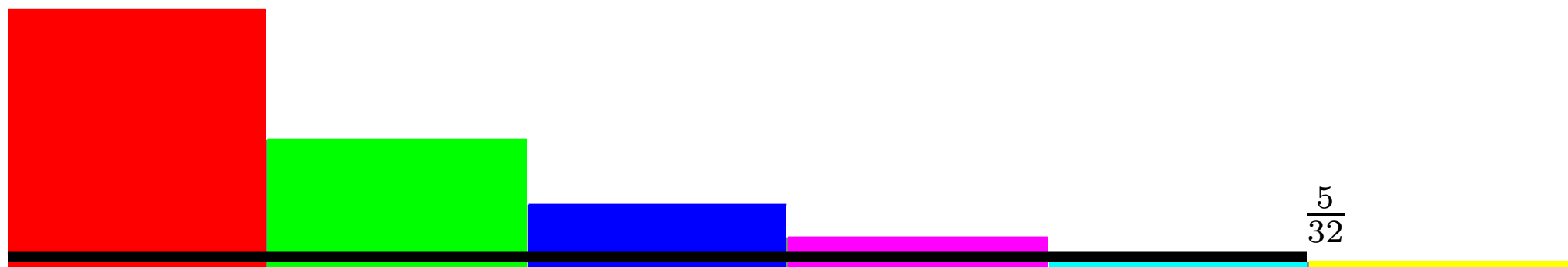
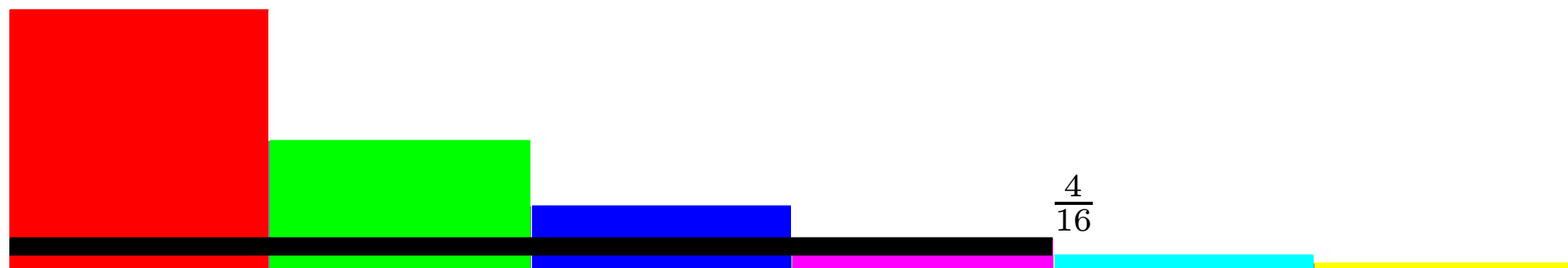
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 1$$



$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 2$$







$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \dots = 2 \quad \text{Nicole Oresme (1360)}$$

Iný spôsob:

$$\left. \begin{array}{l} s = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots \\ \frac{s}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \dots \end{array} \right\} \Rightarrow s - \frac{s}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1 \Rightarrow s = 2$$

Periodické desatinné rozvoje

$$0.636363\dots = \frac{63}{100} + \frac{63}{100^2} + \frac{63}{100^3} + \dots$$

$$a = 0.636363\dots$$

$$100a = 63.636363\dots$$

$$100a - a = 63$$

$$a = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$$

Domáca úloha: nájdite periódu čísla $\frac{355}{113}$.

GEOMETRICKÝ RAD

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

$$s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1}$$

$$qs_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$$

$$s_n - qs_n = 1 - q^n$$

$$s_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

Pre $q = 1$ je $s_n = 1 + 1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^{n-1} = n$.

Nech $0 < q < 1$. Položme $a_n = q^n$. Potom $a_{n+1} = qa_n < a_n$, teda postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca. Zrejme je zdola ohraničená ($a_n > 0$). Teda musí mať limitu. Položme $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Potom

$$a_{n+1} = qa_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = q \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$a = qa$$

$$a = 0$$

Tým sme ukázali, že

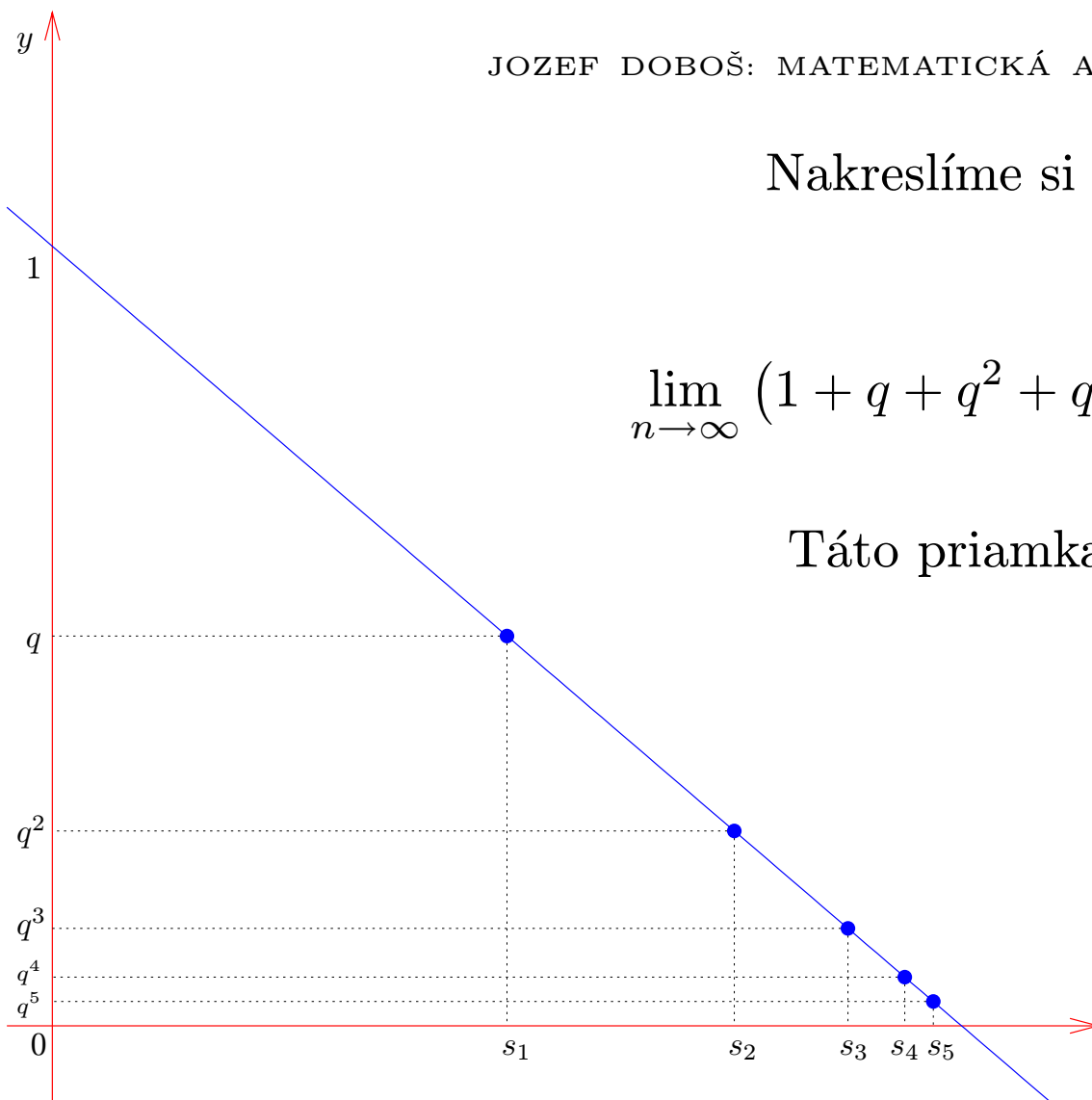
$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

Nakreslíme si priamku $y = (q - 1)x + 1$.

Pretože $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1}) = \frac{1}{1 - q}$$

Táto priamka pretína os x v bode $\frac{1}{1 - q}$.



Nech $-1 < q < 0$. Pretože pre každú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ práve vtedy, keď } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0,$$

máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = 0.$$

Tým sme ukázali, že ak $|q| < 1$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. Pre geometrický rad teda máme

$$\text{ak } |q| < 1, \text{ potom } s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

Hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje**, ak limita postupnosti čiastočných súčtov existuje a je konečná. V ostatných prípadoch hovoríme, že daný rad **diverguje**.

Čiastočné súčty definujeme rekurzívne takto

$$s_1 = a_1$$

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$$

Limita postupnosti čiastočných súčtov sa volá **súčet radu**

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

NUTNÁ PODMIENKA KONVERGENCIE

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Pietro Mengoli (1650)

Vyplýva to z rovnosti $s_n = s_{n-1} + a_n$ prechodom k limite pre $n \rightarrow \infty$.

Príklad. Ak $0 < x < \pi$, potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ diverguje. Ak by totiž konvergoval, muselo by platiť

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n+1)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(nx) \cdot \cos x + \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(nx) \cdot \sin x = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(nx) \cdot \sin x, \end{aligned}$$

odkiaľ $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(nx) = 0$. Ale prechodom k limite pre $n \rightarrow \infty$ v rovnosti $\sin^2(nx) + \cos^2(nx) = 1$ dostávame spor.

Ak $|q| \geq 1$, potom pre geometrický rad nie je splnená nutná podmienka konvergenencie, preto tento rad diverguje.

Skutočne, $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = \begin{cases} +\infty & \text{pre } |q| > 1 \\ 1 & \text{pre } |q| = 1 \end{cases}$, preto nemôže platiť

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

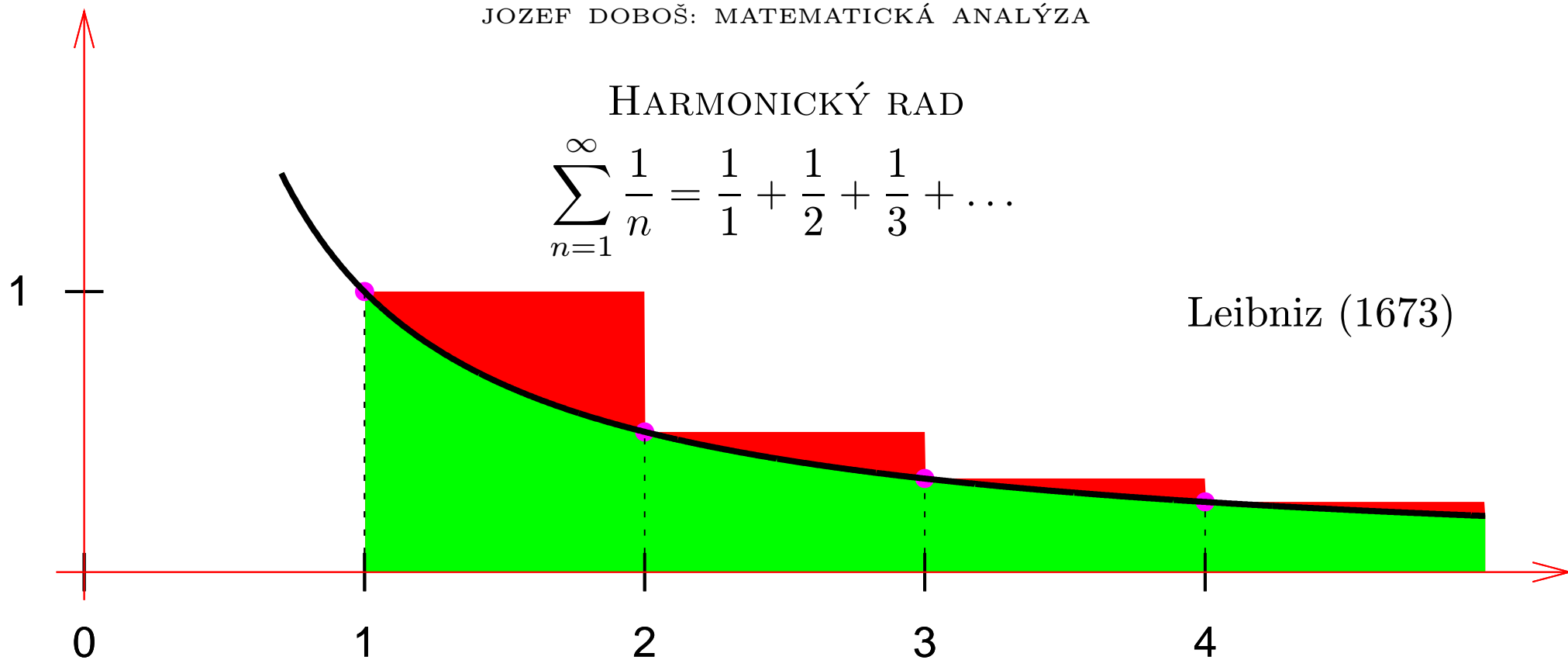
CAUCHY-BOLZANOVA PODMIENKA

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 také, že pre každé $n \geq n_0$ a pre každé p prirodzené platí

$$|s_{n+p} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

HARMONICKÝ RAD

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$



Leibniz (1673)

$$s_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1)$$

Pretože $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$, harmonický rad diverguje.

Ukážeme, že pre harmonický rad nie je splnená Cauchy-Bolzanova podmienka.

$$\begin{aligned} s_{n+p} - s_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+p} \geq \\ &\geq \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \cdots + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p} \end{aligned}$$

pre $p = n$ potom máme

$$s_{n+n} - s_n \geq \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}$$

Teda harmonický rad diverguje.

Položme

$$\gamma_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

Ukážeme, že postupnosť $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje.

To bude ďalší dôkaz divergencie harmonického radu.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

odkiaľ

$$\frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

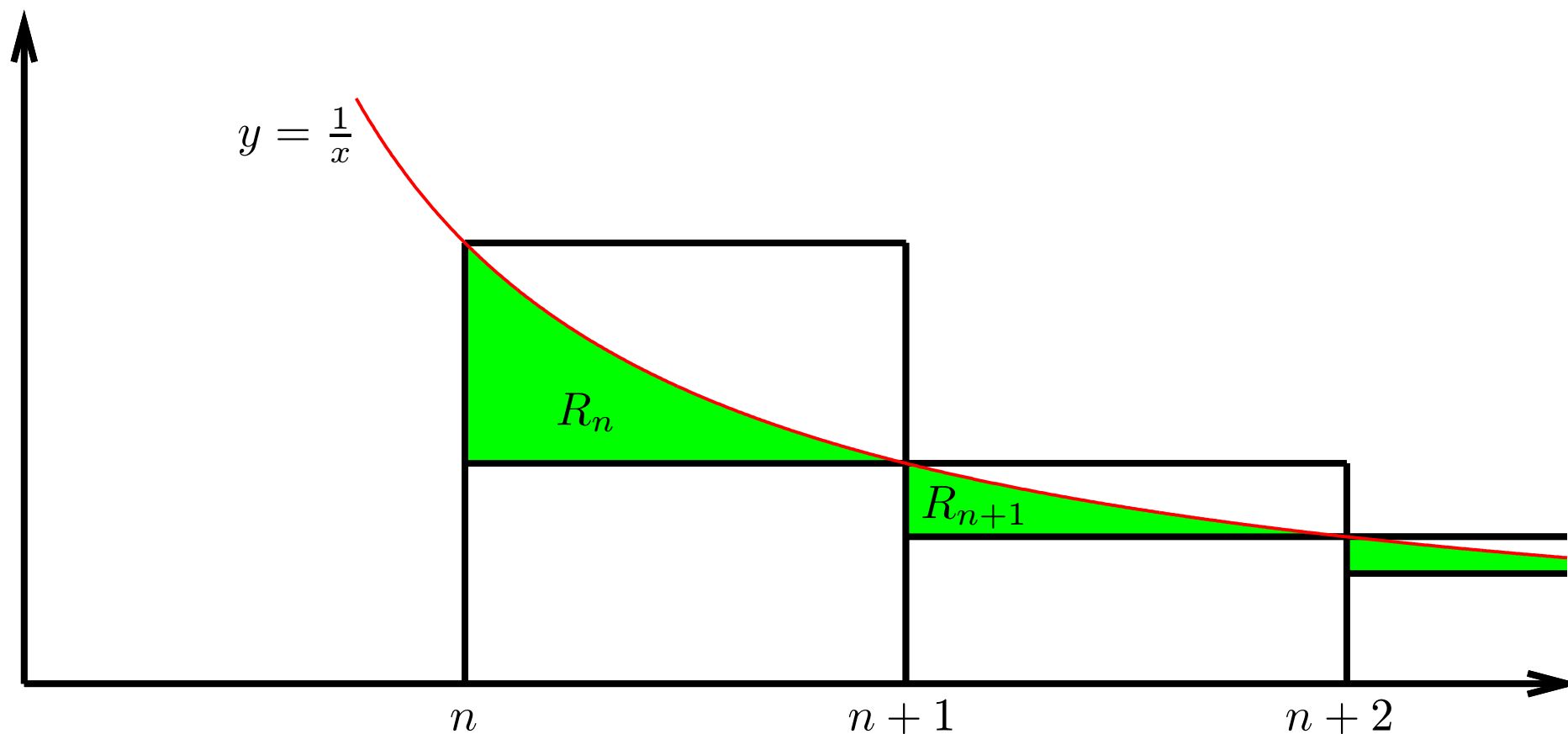
Pretože

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < 0$$

postupnosť $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca. Ukážeme, že $\gamma_n > 0$.

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > \\ &> \ln \left(1 + \frac{1}{1} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{3} \right) + \cdots + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln n = \\ &= \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} - \ln n = \\ &= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n) - \ln n = \\ &= \ln(n+1) - \ln n = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) > \frac{1}{n+1} > 0 \end{aligned}$$

Teda musí existovať $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$. Volá sa **Eulerova-Mascheroniová konštanta**. Jej približná hodnota je $\gamma = 0.577\dots$. Nevie sa, či je to racionálne alebo iracionálne číslo.

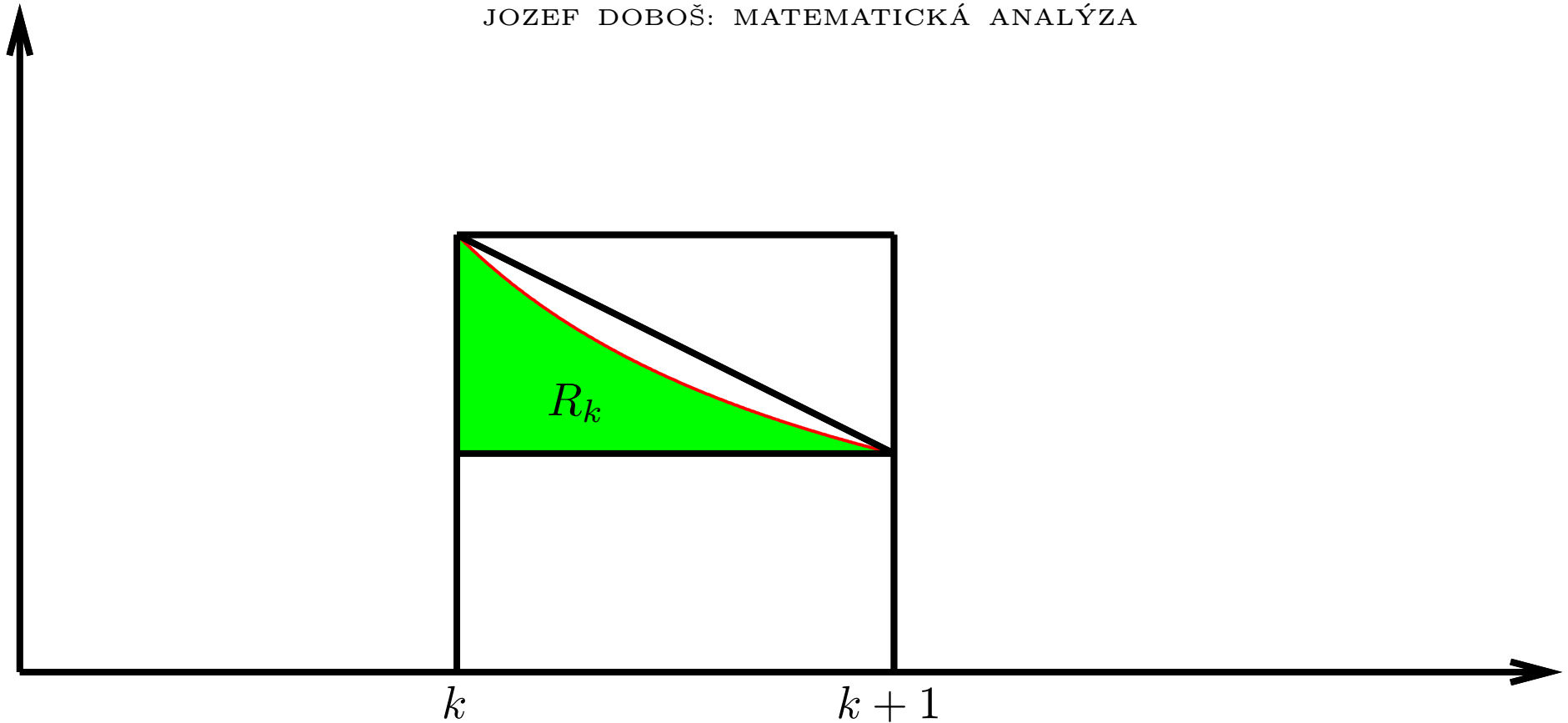


Položme $R_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx - \frac{1}{n+1}$. Potom

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{n+p} R_k &= \int_n^{n+p+1} \frac{1}{x} dx - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p+1} \right) = \\ &= \ln(n+p+1) - \ln n - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+p+1} \right) + \\ &\quad + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = \gamma_n - \gamma_{n+p+1} \end{aligned}$$

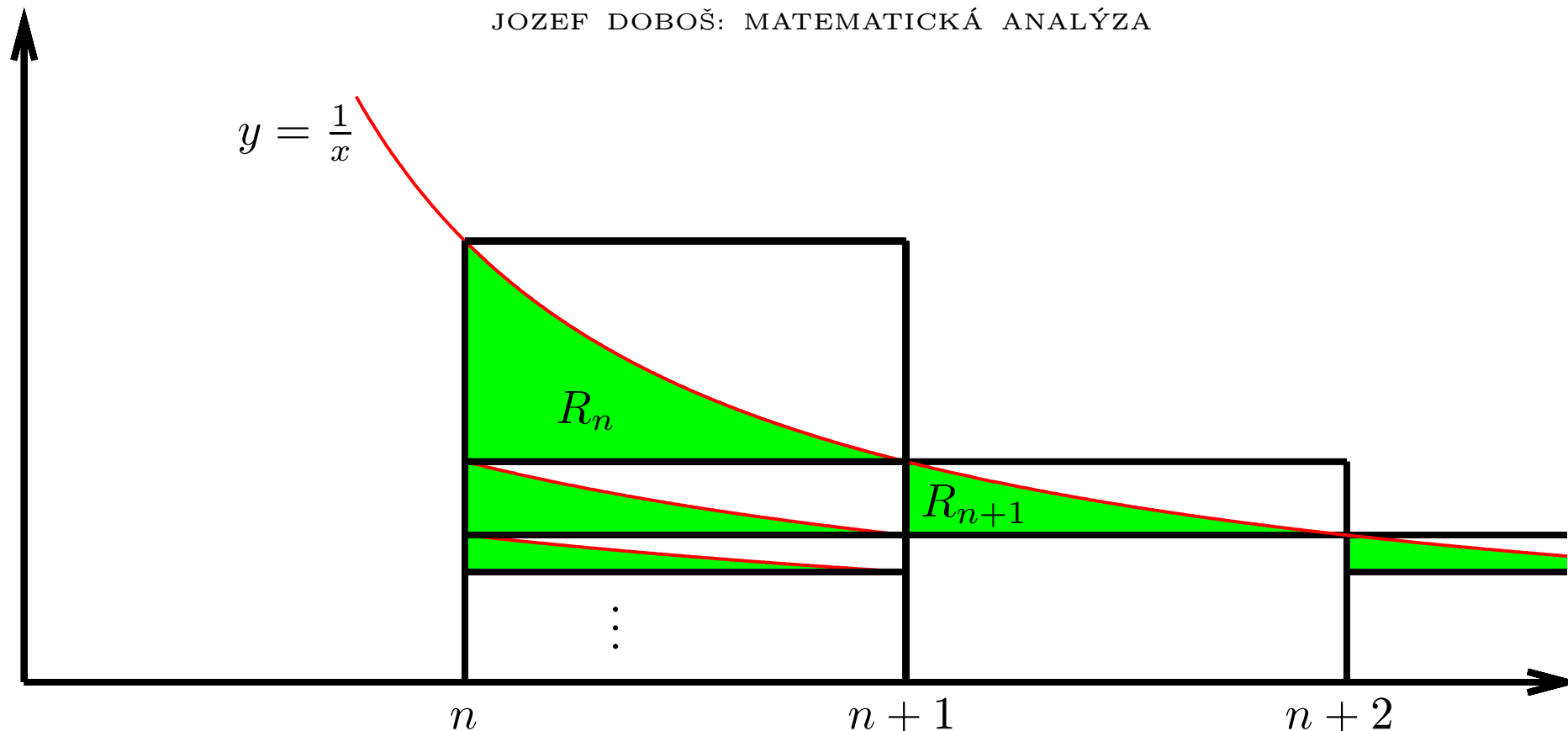
V limite pre $p \rightarrow +\infty$ dostávame

$$\sum_{k=n}^{\infty} R_k = \gamma_n - \gamma$$



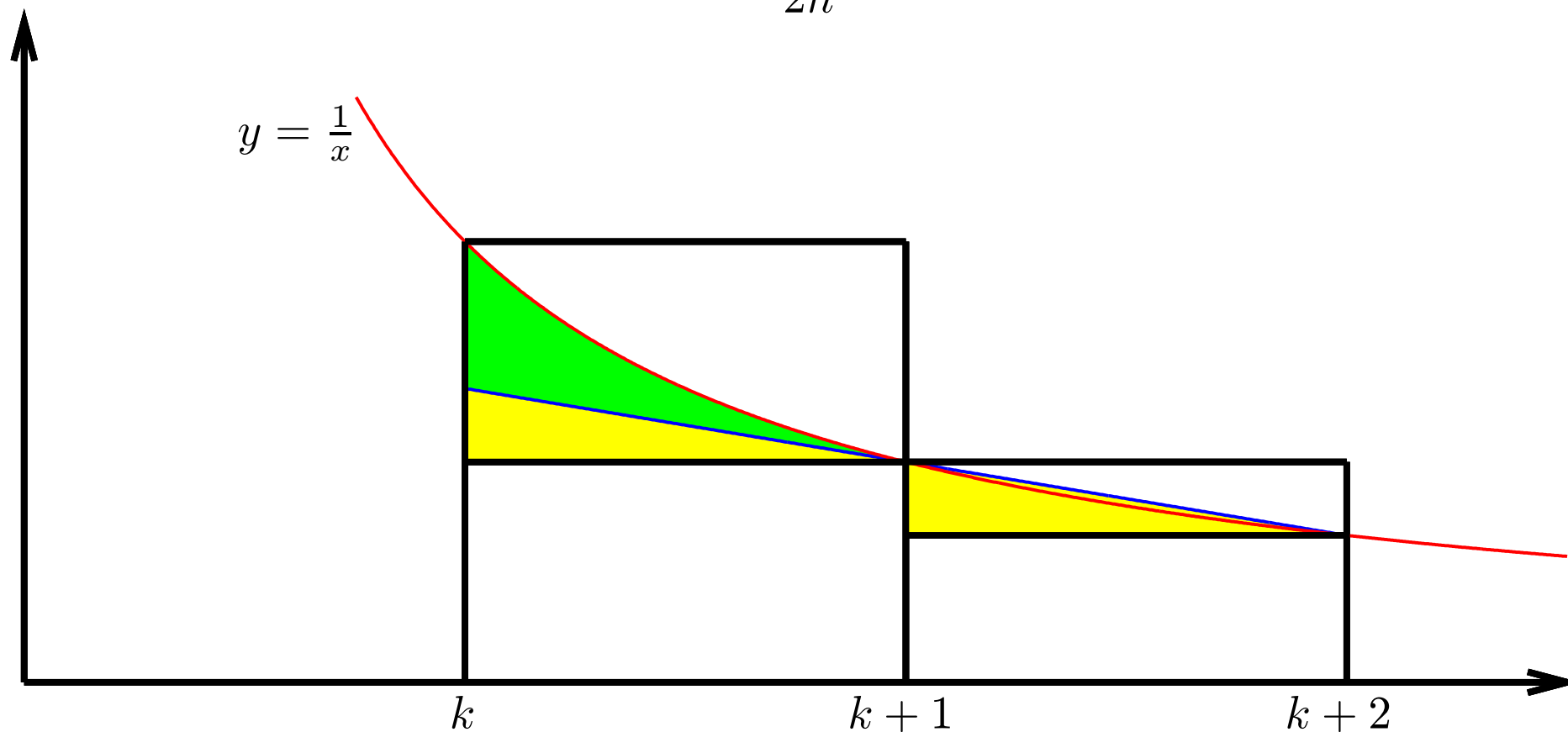
Zrejme R_k je menšie ako polovica plochy obdĺžnika, teda

$$R_k < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$



Posunieme všetky zelené oblasti úplne vľavo. Plošný obsah tohto útvaru, ktorý leží v ľavom obdĺžniku, t. j. súčet radu $\sum_{k=n}^{\infty} R_k = \gamma_n - \gamma$, je menší ako polovica plochy tohto obdĺžnika.

Tým sme ukázali, že $\gamma_n - \gamma < \frac{1}{2n}$.



Všimnime si dva identické žlté trojuholníky určené sečnicou.

Plošný obsah žltého trojuholníka je menší ako R_k , teda

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) < R_k$$

Tieto nerovnosti sčítame:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) < \sum_{k=n}^{\infty} R_k = \gamma_n - \gamma$$

Vľavo máme teleskopický rad, ktorého súčet je $\frac{1}{2(n+1)}$.

Získané výsledky spojíme:

$$\frac{1}{2(n+1)} < \gamma_n - \gamma < \frac{1}{2n}$$

LEIBNIZOV RAD

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

Pretože

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1, \quad -\frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{6} = \frac{1}{6} - \frac{1}{3}, \quad \dots, \quad -\frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n},$$

platí

$$\begin{aligned} s_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \\ &= \gamma_{2n} + \ln(2n) - (\gamma_n + \ln n) = \gamma_{2n} - \gamma_n + \ln 2 \end{aligned}$$

Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n + \ln 2 = \gamma - \gamma + \ln 2 = \ln 2$$

Ďalej

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(s_{2n} + \frac{1}{2n+1} \right) = \ln 2$$

ZÁKLADNÉ VLASTNOSTI

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n) = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (c \neq 0)$$

Rad $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ sa volá **zvyšok radu** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ po k -tom člene. Bud' obidva konvergujú, alebo obidva divergujú.

Utvoríme rad

$$\underbrace{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1})}_{=b_1} + \underbrace{(a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2})}_{=b_2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je vybraná postupnosť z postupnosti čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. Naopak to neplatí

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

HARMONICKÝ RAD

Jeden z novších dôkazov divergencie (1975)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \dots > \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

RADY S NEZÁPORNÝMI ČLENMI ($a_n \geq 0$ PRE KAŽDÉ n)

Postupnosť čiastočných súčtov je neklesajúca.

Vloženie nulových členov neovplyvní konvergenciu, ani súčet radu.

$$\underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{\text{konečný počet núl}} + a_1 + \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{\text{konečný počet núl}} + a_2 + \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{\text{konečný počet núl}} + a_3 + \dots$$

Dostaneme rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je vybraná postupnosť z postupnosti čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Monotónna postupnosť konverguje práve vtedy, keď konverguje nejaká jej podpostupnosť. Preto sú obidva rady buď súčasne konvergentné, alebo obidva súčasne divergentné.

Z tohto dôvodu budeme ďalej uvažovať iba rady s kladnými členmi.

POROVNÁVACIE KRITÉRIUM V NELIMITNOM TVARE

Cauchy (1821)

Nech pre každé prirodzené číslo n platí

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

(rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sa volá majorantný rad k radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$). Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, potom aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Dôkaz. Stačí si uvedomiť, že pre rady s kladnými členmi je postupnosť čiastočných súčtov rastúca, preto stačí dokázať jej ohraničenosť.

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty$$

Obrátená veta: Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.

POROVNÁVACIE KRITÉRIUM V LIMITNOM TVARE I.

Predpokladajme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ existuje a je konečná. Potom z konvergenencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vyplýva konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dôkaz. Pre $\varepsilon = 1$ existuje také n_0 , že pre každé prirodzené číslo $n \geq n_0$ platí

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| < 1$$

kde $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$. Odtiaľ $a_n < (l + 1)b_n$. Pretože $l \geq 0$, rad $\sum_{n=n_0}^{\infty} (l + 1)b_n$ má kladné členy.

POROVNÁVACIE KRITÉRIUM V LIMITNOM TVARE II.

Ak pre rady s kladnými členmi platí

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty,$$

potom obidva rady sú buď konvergentné, alebo obidva sú divergentné.

Príklad.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\left[\text{domáca úloha: } \frac{1}{n^2} = a_{n-1} - a_n, \text{ kde } a_n = \frac{2 \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2n} x \, dx}{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \, dx} \right]$$

PODIELOVÉ KRITÉRIUM

Ak pre rady s kladnými členmi platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \text{ pre každé prirodzené } n,$$

potom z konvergenzie radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vyplýva konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dôkaz.

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdot \frac{b_4}{b_3} \cdots \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

$$\frac{a_n}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_1}$$

a použijeme porovnávacie kritérium.

D'ALEMBERTOVO KRITÉRIUM (1768)

Majme rad s kladnými členmi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- 1) Ak pre každé prirodzené n platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ (kde q je konštanta), potom daný rad konverguje.
- 2) Ak pre každé prirodzené n platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, potom daný rad diverguje.

Dôkaz. 1) Pretože $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n}$, stačí použiť podielové kritérium.

2) Nie je splnená nutná podmienka konvergenencie.

LIMES INFERIOR A LIMES SUPERIOR

Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel.

Potom $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ má tieto vlastnosti:

- (1) ak $l < \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$, potom existuje len konečne veľa takých n , že $x_n < l$;
- (2) ak $l > \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$, potom existuje nekonečne veľa takých n , že $x_n < l$.

Podobne, $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ má tieto vlastnosti:

- (1) ak $l > \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$, potom existuje len konečne veľa takých n , že $x_n > l$;
- (2) ak $l < \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$, potom existuje nekonečne veľa takých n , že $x_n > l$.

LIMITNÉ D'ALEMBERTOVO KRITÉRIUM

- 1) Nech $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
- 2) Nech $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Dôkaz. 1) Zvolíme q tak, aby $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$.

2) Na domácu úlohu.

Poznámka. Ak $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, kritérium nedáva informáciu o konvergenčnom charaktere daného radu.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{(-1)^n - 1}{2}}$$

CAUCHYHO KRITÉRIUM (1821)

Majme rad s kladnými členmi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1) Ak pre každé prirodzené n platí $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ (kde q je konštanta), potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

2) Ak pre nekonečne veľa n platí $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Dôkaz. 1) $a_n \leq q^n$ a stačí porovnať s geometrickým radom.

2) Nie je splnená nutná podmienka konvergencie.

LIMITNÉ CAUCHYHO KRITÉRIUM

- 1) Nech $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
- 2) Nech $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Dôkaz. 1) Zvolíme q tak, aby $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < q < 1$.

2) Na domácu úlohu.

Poznámka. Ak $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, kritérium nedáva informáciu o konvergenčnom charaktere daného radu.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$$

CAUCHYHO KRITÉRIUM JE SILNEJŠIE AKO D'ALEMBERTOVO

Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť kladných čísel. Potom

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Dôkaz. Ukážeme, že (ostatné na domácu úlohu)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Položme $l = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Nech $l < +\infty$ (opačný prípad je zrejmý).

Nech $\varepsilon > 0$. Potom existuje m prirodzené také, že pre každé $n \geq m$ platí

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < l + \varepsilon$$

Nech k je prirodzené číslo. Potom

$$\frac{x_{m+1}}{x_m} \cdot \frac{x_{m+2}}{x_{m+1}} \cdot \frac{x_{m+3}}{x_{m+2}} \cdots \frac{x_{m+k}}{x_{m+k-1}} < (l + \varepsilon)^k$$

$$\frac{x_{m+k}}{x_m} < (l + \varepsilon)^k$$

$$x_{m+k} < (l + \varepsilon)^k \cdot x_m$$

$$\sqrt[m+k]{x_{m+k}} < (l + \varepsilon)^{\frac{k}{m+k}} \cdot x_m^{\frac{1}{m+k}}$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[m+k]{x_{m+k}} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} (l + \varepsilon)^{\frac{k}{m+k}} \cdot x_m^{\frac{1}{m+k}} = l + \varepsilon$$

Ukázali sme, že pre každé $\varepsilon > 0$ platí $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq l + \varepsilon$. Teda

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq l.$$

RAABEHO KRITÉRIUM (1832)

Majme rad s kladnými členmi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- 1) Ak pre každé prirodzené n platí $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq q > 1$ (kde q je konštanta), potom daný rad konverguje.
- 2) Ak pre každé prirodzené n platí $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$, potom daný rad diverguje.

Dôkaz. 1)

$$na_n \geq qa_{n+1} + na_{n+1} = (n+1)a_{n+1} + (q-1)a_{n+1} > (n+1)a_{n+1}$$

Tým sme ukázali, že postupnosť $\{na_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca. Jej členy sú kladné, teda je ohraničená. Preto musí mať konečnú limitu l .

Pretože (ako sme ukázali vyššie)

$$(q - 1)a_{n+1} \leq na_n - (n + 1)a_{n+1} = b_n,$$

rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je majorantný k radu $\sum_{n=1}^{\infty} (q - 1)a_{n+1}$. Ukážeme, že konverguje.

$$\sum_{k=1}^n b_k = (a_1 - 2a_2) + (2a_2 - 3a_3) + (3a_3 - 4a_4) + \dots$$

$$\dots + (na_n + (n + 1)a_{n+1}) = a_1 - (n + 1)a_{n+1}$$

Teda $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k = a_1 - l$.

Podľa porovnávacieho kritéria konverguje aj $\sum_{n=1}^{\infty} (q - 1)a_{n+1}$.

2) Pretože $na_n \leq (n+1)a_{n+1}$, postupnosť $\{na_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca. Odtiaľ $n \cdot a_n \geq 1 \cdot a_1$, čiže

$$\frac{a_1}{n} \leq a_n$$

Stačí porovnať s harmonickým radom.

LIMITNÉ RAABEHO KRITÉRIUM

Ak $\limsup_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) < -1$, daný rad konverguje.

Ak $\liminf_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) > -1$, daný rad diverguje.

Ak existuje táto limita a rovná sa jednej, kritérium nedáva informáciu o konvergenčnom charaktere daného radu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

KONDENZAČNÉ KRITÉRIUM (CAUCHY, 1821)

Majme rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taký, že $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \dots \geq 0$. Potom tento

rad konverguje práve vtedy, keď konverguje rad $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$

Dôkaz. Označme čiastočné súčty týchto radov

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$t_k = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots + 2^k a_{2^k}$$

1) Nech $n \leq 2^k$. Potom

$$\begin{aligned} s_n &\leq a_1 + a_2 + \dots + a_{2^k} + \dots + a_{2^{k+1}-1} = \\ &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + (a_{2^k} + \dots + a_{2^{k+1}-1}) \leq \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^k a_{2^k} = t_k \end{aligned}$$

Teda ak $n \leq 2^k$, potom $s_n \leq t_k$.

2) Nech $n > 2^k$. Potom

$$\begin{aligned} s_n &\geq a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k} = \\ &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \geq \\ &\geq a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k} > \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k}) = \frac{1}{2} \cdot t_k \end{aligned}$$

Teda ak $n > 2^k$, potom $s_n > \frac{1}{2} \cdot t_k$.

Príklad. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, kde p je konštanta, konverguje práve vtedy, keď konverguje rad $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-p})^k$, čo je geometrický rad, ktorý konverguje práve vtedy, keď $|2^{1-p}| < 1$, čiže keď $p > 1$.

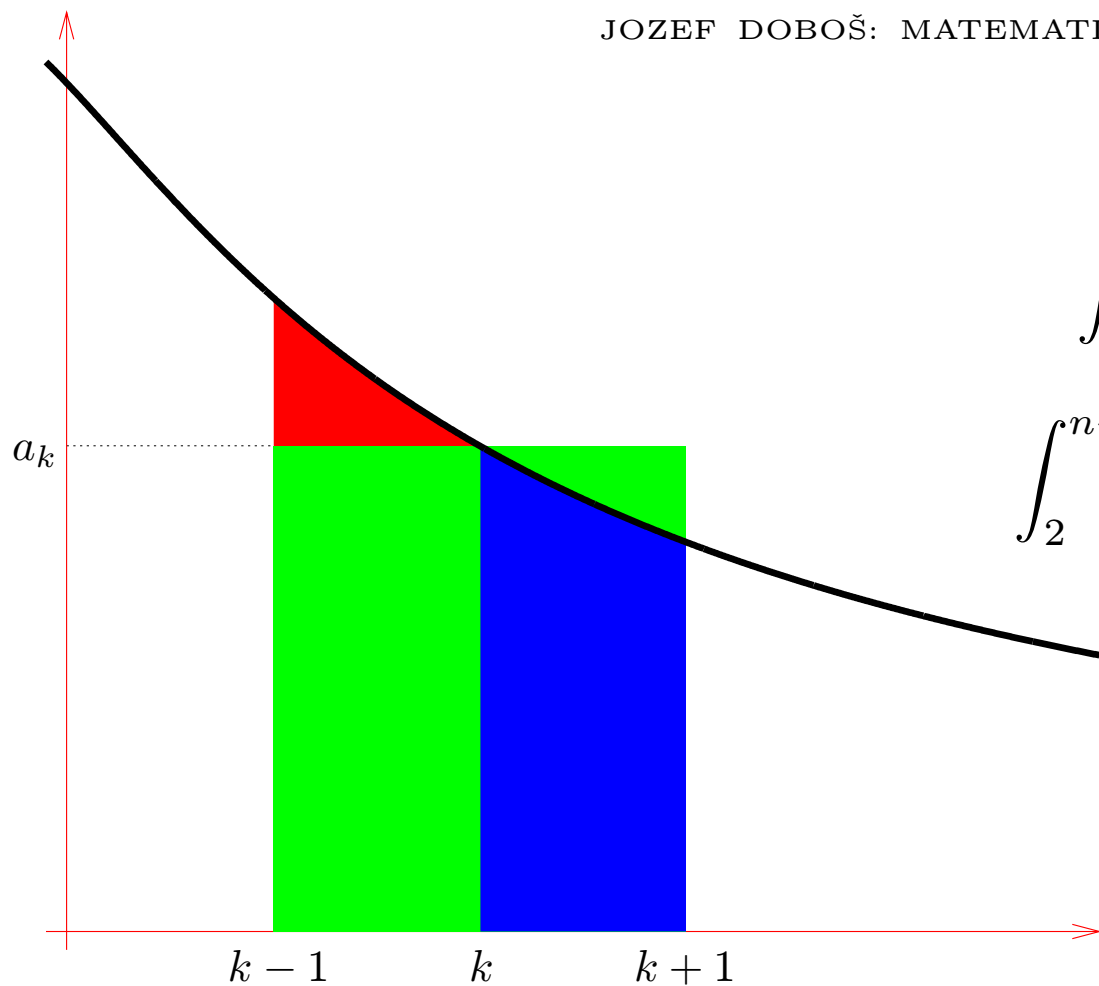
Úloha. Pomocou kondenzačného kritéria vyšetrite konvergenciu radu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

INTEGRÁLNE KRITÉRIUM (EULER, 1736)

Nech f je nezáporná, nerastúca reálna funkcia definovaná aspoň na intervale $\langle 1, +\infty \rangle$. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konverguje práve vtedy, keď konverguje integrál $\int_1^{\infty} f(t) dt$.

Dôkaz. Z monotónnosti vyplýva integrovateľnosť na každom ohraničenom intervale. Položme $a_k = f(k)$. Potom



$$\int_k^{k+1} f(t) dt \leq a_k \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

$$\int_2^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=2}^n a_k \leq \int_1^n f(t) dt$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

Euler (1735)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 2x} &= \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2} - x)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{3\pi}{8}} \right] = \\ &= \frac{1}{4^2} \left[\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{16}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{7\pi}{16}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{3\pi}{16}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{5\pi}{16}} \right] = \dots \end{aligned}$$

$$2 = \frac{1}{4^n} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2^{n+2}}}$$

Dôkaz matematickou indukciou na domácu úlohu.

Nech $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Pretože platí $\sin x < x < \tan x$, máme

$$\frac{1}{\sin^2 x} > \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \quad \left(= \frac{1}{\tan^2 x} \right)$$

potom

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2^{n+2}}} - 1 < \left[\frac{2^{n+2}}{(2k-1)\pi} \right]^2 < \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2^{n+2}}}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{2^n} \left[\frac{1}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2^{n+2}}} - 1 \right] &< \sum_{k=1}^{2^n} \left[\frac{2^{n+2}}{(2k-1)\pi} \right]^2 < \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2^{n+2}}} \\
 \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2^{n+2}}} - 2^n &< \frac{16 \cdot 4^n}{\pi^2} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{(2k-1)^2} < \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2^{n+2}}} \\
 2 \cdot 4^n - 2^n &< \frac{16 \cdot 4^n}{\pi^2} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{(2k-1)^2} < 2 \cdot 4^n \quad / \cdot \frac{1}{4^n} \\
 2 - \frac{1}{2^n} &< \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{(2k-1)^2} < 2
 \end{aligned}$$

teda $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{(2k-1)^2} = 2$, odkiaľ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je rastúca, teda

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2^n}. \text{ Potom}$$

$$s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{k^2}$$

$$s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{4} s_{2^{n-1}}$$

$$s = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \cdot s$$

$$s = \frac{\pi^2}{6}$$

(Amer. Math. Monthly, 2002)

ABSOLÚTNA KONVERGENCIA

Majme rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ktorého členy sú reálne čísla, nie nutne všetky nezáporné. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, potom hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne.

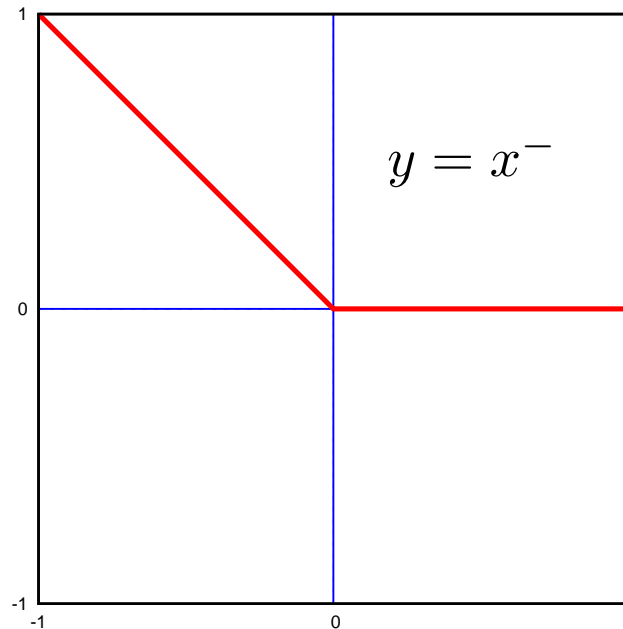
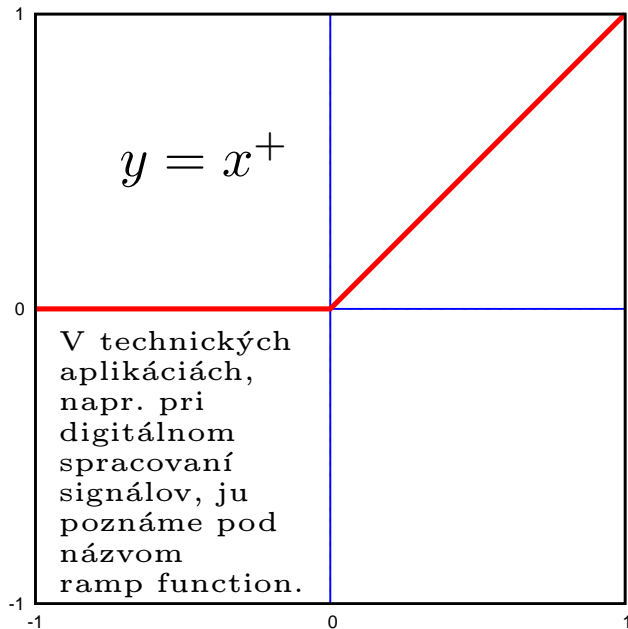
Z nerovnosti $a_n \leq |a_n|$ vyplýva, že ak daný rad konverguje absolútne, potom konverguje.

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, ale rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom hovoríme, že daný rad konverguje relatívne.

RELATÍVNA KONVERGENCIA

Ak x je reálne číslo, položíme

$$x^+ = \begin{cases} x & \text{pre } x > 0, \\ 0 & \text{pre } x \leq 0, \end{cases} \quad x^- = \begin{cases} -x & \text{pre } x < 0, \\ 0 & \text{pre } x \geq 0. \end{cases}$$



Potom $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$.

Pre daný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ položíme

$$p_n = \sum_{k=1}^n a_k^+ \quad q_n = \sum_{k=1}^n a_k^- \quad s_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad t_n = \sum_{k=1}^n |a_k|$$

Napríklad pre rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ máme

$$\begin{aligned} s_5 &= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} & t_5 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \\ p_5 &= 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + 0 \\ q_5 &= 1 + 0 + \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

- 1) Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne, potom z nerovností $a_n^+ \leq |a_n|$,
 $a_n^- \leq |a_n|$ a porovnávacieho kritéria vyplýva, že obidva rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$,
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergujú.
- 2) Ak obidva rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergujú, potom z rovnosti
 $t_n = p_n + q_n$ vyplýva, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne.

- 3) Ak práve jeden z radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ diverguje, potom z rovnosti $s_n = p_n - q_n$ vyplýva, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
- 4) Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relatívne, potom obidva rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ divergujú, pričom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^- = 0$.

ALTERNUJÚCE RADY

LEIBNIZOVO KRITÉRIUM (1682)

Ak $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \dots \geq 0$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, potom rad

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konverguje.

Dôkaz.

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 - a_2$$

$$s_3 = s_1 - a_2 + a_3 \leq s_1$$

$$s_4 = s_2 + a_3 - a_4 \geq s_2$$

$$s_5 = s_3 - a_4 + a_5 \leq s_3$$

$$s_6 = s_4 + a_5 - a_6 \geq s_4$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

nerastúca

neklesajúca

Ukážeme, že tieto postupnosti sú ohraničené.

$$s_{2k} \geq a_1 - a_2 \geq 0$$

$$s_{2k+1} = s_{2k} + a_{2k+1} \geq 0$$

$$s_{2k-1} \leq s_1 = a_1$$

$$s_{2k} = s_{2k-1} - a_{2k} \leq s_{2k-1} \leq a_1$$

Teda obidve postupnosti musia mať konečné limity. Pretože

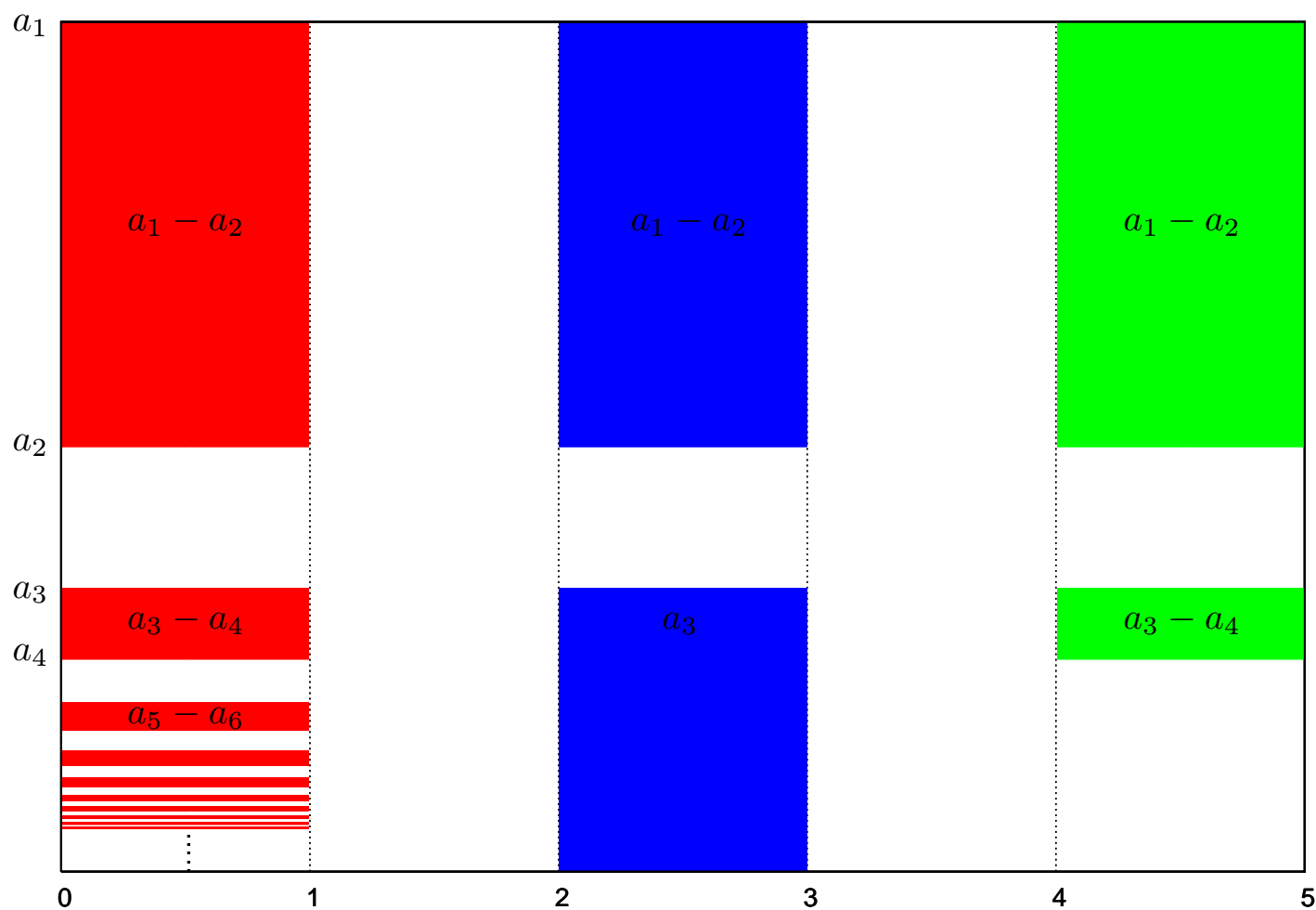
$$s_{2k+1} = s_{2k} + a_{2k+1}$$

tieto limity sú rovnaké.

Ukážeme, že platí

$$s_{2k} < s < s_{2k+1}$$

$$|s_{n+k} - s_n| \leq a_{n+1}$$



(Alternating series convergence: a visual proof, Teaching Math. Appl., 2006)

Príklad.
$$1 - \underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2}}_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} - \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 3}}_{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} - \underbrace{\frac{1}{3 \cdot 4}}_{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} - \underbrace{\frac{1}{4 \cdot 5}}_{\frac{1}{5}} + \dots$$

Požiadavku monotónnosti v Leibnizovom kritériu nemožno vynechať.

SUMÁCIA PER PARTES

$$\sum_{k=p+1}^q u_k (v_{k+1} - v_k) + \sum_{k=p+1}^q v_k (u_k - u_{k-1}) = u_q v_{q+1} - u_p v_{p+1}$$

Dôkaz.

$$\sum_{k=p+1}^q [u_k (v_{k+1} - v_k) + v_k (u_k - u_{k-1})] = \sum_{k=p+1}^q [u_k v_{k+1} - u_{k-1} v_k]$$

čo je teleskopický súčet.

ABELOVA LEMA (1826)

Nech $p < q$ sú prirodzené čísla. Potom

$$\sum_{k=p+1}^q a_k b_k = \sum_{k=p+1}^q s_k (b_k - b_{k+1}) + s_q b_{q+1} - s_p b_{p+1},$$

kde

$$s_k = \sum_{i=1}^k a_i.$$

Dôkaz. V sumácii per partes položíme $u_k = s_k$ a $v_k = b_k$.

DIRICHLETOVA VETA (1863)

Nech $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq 0$. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má ohraničené čiastočné súčty a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Dôkaz. Použijeme Cauchy-Bolzanovo kritérium. Pretože $|s_k| \leq M$, kde M je konštanta, máme

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=p+1}^q a_k b_k \right| &= \left| \sum_{k=p+1}^q s_k (b_k - b_{k+1}) + s_q b_{q+1} - s_p b_{p+1} \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=p+1}^q |s_k| (b_k - b_{k+1}) + |s_q| b_{q+1} + |s_p| b_{p+1} \leq \\ &\leq M \left[\sum_{k=p+1}^q (b_k - b_{k+1}) + b_{q+1} + b_{p+1} \right] = 2M b_{p+1} < \varepsilon \end{aligned}$$

Príklad. Aby sme ukázali, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ konverguje, stačí overiť, že

rad $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ má ohraničené čiastočné súčty $s_n = \sum_{k=1}^n \sin k$.

$$2 \sin\left(\frac{1}{2}\right) \cdot s_n = \sum_{k=1}^n 2 \sin\left(\frac{1}{2}\right) \sin k = \sum_{k=1}^n \left[\cos\left(k - \frac{1}{2}\right) - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) \right] =$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$= \left[\cos\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \cos\left(1 + \frac{1}{2}\right) \right] + \left[\cos\left(2 - \frac{1}{2}\right) - \cos\left(2 + \frac{1}{2}\right) \right] + \cdots + \left[\cos\left(n - \frac{1}{2}\right) - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \right] =$$

$$= \cos\left(\frac{1}{2}\right) - \cos\left(\frac{3}{2}\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\right) - \cos\left(\frac{5}{2}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{2n-1}{2}\right) - \cos\left(\frac{2n+1}{2}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{1}{2}\right) - \cos\left(\frac{2n+1}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{n+1}{2}\right) \sin\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$s_n = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right) \sin\left(\frac{n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$$

ABELOVA VETA

Nech $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq 0$. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Dôkaz. Prevedieme to na Dirichletovu vetu. Pretože postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna a ohraničená, má limitu b . Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - b) = 0$. Podľa

Dirichletovej vety rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n - b \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Pretože rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

PREROVNANIE RADOV

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

Nech $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je bijekcia. Ak $b_k = a_{\varphi(k)}$, potom hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je prerovnaním radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s nezápornými členmi a rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je jeho prerovnaním, potom platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Dôkaz. Stačí overiť, že platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Nech n je prirodzené číslo. Položme $n_0 = \max\{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)\}$. Potom

$$\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n a_{\varphi(k)} \leq \sum_{k=1}^{n_0} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Pre $n \rightarrow \infty$ dostávame požadovanú nerovnosť.

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne, potom pre jeho ľubovoľné prerovnanie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dôkaz. Pretože rad $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ je prerovnaním radu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje absolútne.

Podľa predošlej lemy platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^-$, teda

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

RIEMANNOVA VETA (1867)

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je relatívne konvergentný rad. Nech $a \leq b$ (môže byť aj $a = -\infty$, alebo $b = +\infty$). Potom existuje také prerovnanie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ radu

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, že

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} s_n = a, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} s_n = b,$$

kde $s_n = \sum_{k=1}^n b_k$.

Dôkaz. Obmedzíme sa na prípad alternujúceho radu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, kde

$a_n > 0$. Ďalej budeme predpokladať, že $a = b = \ell$, kde ℓ je reálne číslo. Čiastočné súčty vytvorené iba z kladných členov daného radu, t. j.

$\sum_{k=1}^n a_{2k-1}$, tvoria rastúcu postupnosť s limitou $+\infty$.

Konštrukciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ začneme kladnými členmi daného alternujúceho radu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ až dotedy, kým jeho čiastočné súčty $\sum_{k=1}^n b_k$ po prvýkrát prekročia hodnotu ℓ .

Podobne čiastočné súčty vytvorené iba zo záporných členov daného radu, t. j. $\sum_{k=1}^n (-a_{2k})$, tvoria klesajúcu postupnosť s limitou $-\infty$.

V konštrukcii radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pokračujeme zápornými členmi daného alternujúceho radu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ až dotedy, kým jeho čiastočné súčty $\sum_{k=1}^n b_k$ po prvýkrát neklesnú pod hodnotu ℓ .

Tieto dve etapy konštrukcie striedavo opakujeme.

Pretože rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konverguje, platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. To nám zabezpečí, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k = \ell$.

SÚČIN RADOV

Pod označením **Cauchyho súčin radov** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ rozumieme rad

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, kde

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Príklad. (Cauchy, 1821) Cauchyho súčin dvoch (rovnakých) relatívne konvergentných radov môže divergovať. Stačí položiť

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}, \quad a_0 = b_0 = 0$$

MERTENSOVA VETA

Ak jeden z dvoch konvergentných radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje absolútne, potom ich Cauchyho súčin konverguje a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right)$$

WALLISOV SÚČIN (1655)

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots = \frac{\pi}{2}$$

Budeme sa zaoberat' funkciou $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Jej nulové body sú $\pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$

Vytvoríme postupnosť polynómov $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ takú, že

- 1) f_n bude mať korene $\pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots, \pm n\pi$;
- 2) $f_n(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

$$f_1(x) = c_1(x^2 - \pi^2)$$

$$1 = f_1(0) = c_1 \cdot (-\pi^2)$$

$$f_1(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$$

$$\vdots$$

$$f_n(x) = c_n f_{n-1}(x)(x^2 - n^2 \pi^2)$$

$$1 = f_n(0) = c_n f_{n-1}(0) \cdot (-n^2 \pi^2)$$

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right)$$

Potom $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, t. j.

$$\frac{\sin x}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2} \right)$$

Dosadíme $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{4k^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{4k^2 - 1}{4k^2}$$

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{4k^2 - 1}$$

Ukážeme si iné odvodenie Wallisovho súčinu. Nech $n > 1$ je prirodzené. Potom metódou per partes možno ukázať, že platí

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx$$

Odtiaľ

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x \, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1} x \, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2k)}{3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}$$

Pretože na intervale $\langle 0, \pi/2 \rangle$ platí

$$\sin^{2k+1} x \leq \sin^{2k} x \leq \sin^{2k-1} x$$

odtiaľ integráciou dostaneme (s použitím vyššie odvodených vzorcov)

$$\frac{2 \cdot 4 \cdots (2k)}{3 \cdot 5 \cdots (2k-1)} \leq \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{2 \cdot 4 \cdots (2k-2)}{3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}$$

a po úprave

$$\frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2k)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdots (2k-1)^2} \cdot \frac{1}{2k+1} \leq \frac{\pi}{2}$$

Odtiaľ už vyplýva požadované tvrdenie.

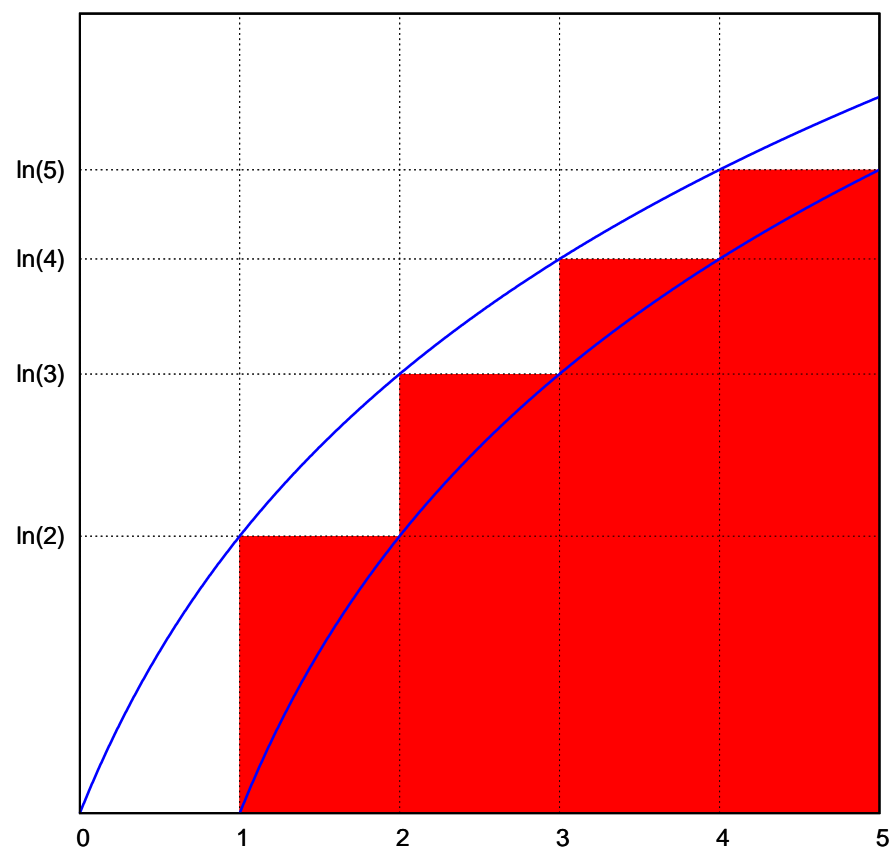
FAKTORIÁL

Logaritmovaním prevedieme faktoriál na súčet:

$$\ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n = \sum_{i=1}^n \ln i$$

Členy tohto súčtu ohraničíme pomocou $\ln x$ a $\ln(x + 1)$.

$$\int_1^n \ln x \, dx \leq \sum_{i=1}^n \ln i \leq \int_0^n \ln(x + 1) \, dx$$



$$n \ln \frac{n}{e} + 1 \leq \sum_{i=1}^n \ln i \leq (n+1) \ln \frac{n+1}{e} + 1$$

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n e \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} e.$$

Teda $n!$ sa chová podobne ako výraz $\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

STIRLINGOV VZOREC (1730)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$$

Dôkaz. Položme

$$a_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n}}$$

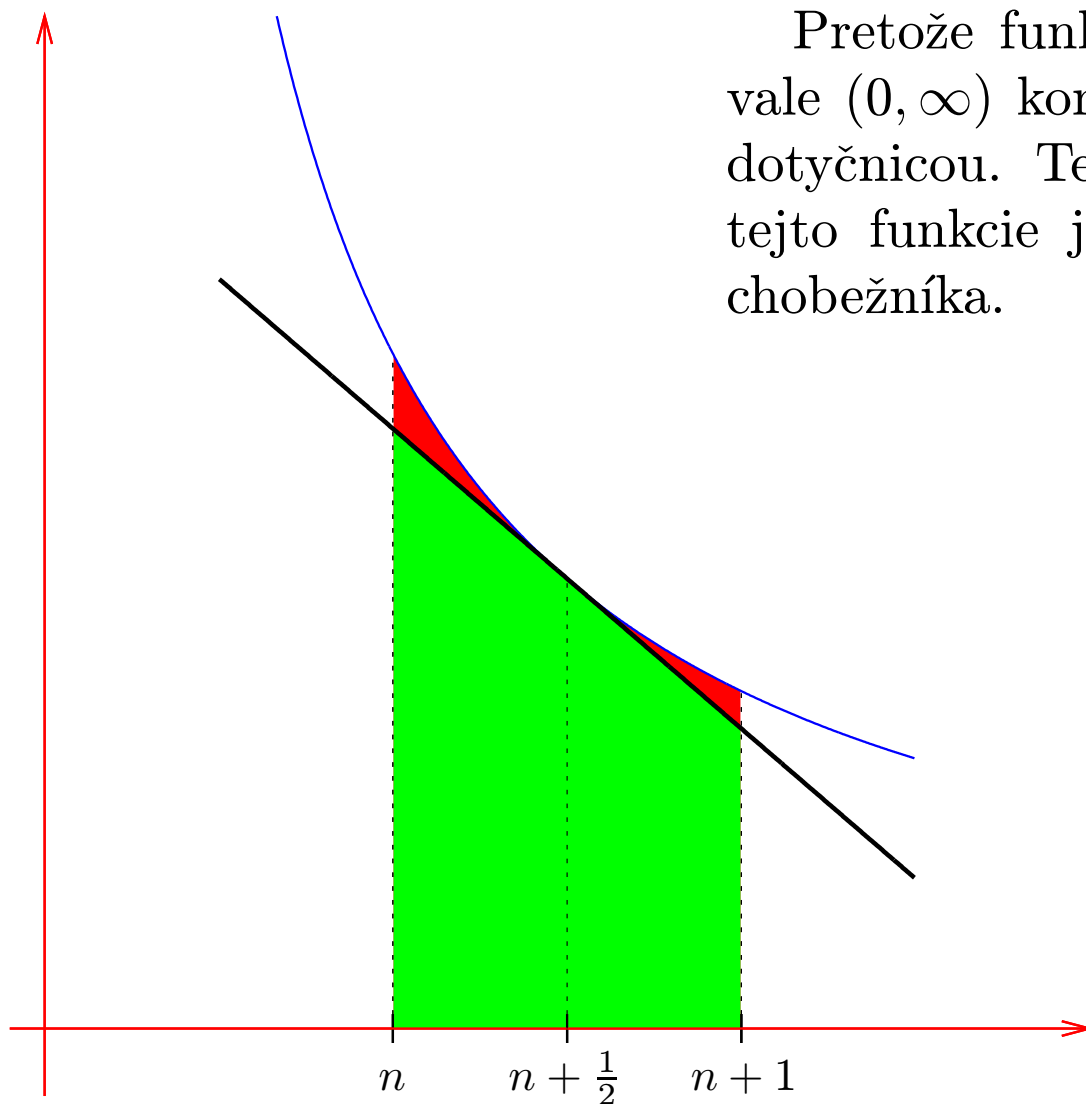
Potom

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

Odtiaľ

$$\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$$

Pretože funkcia $y = \frac{1}{x}$ je na intervale $(0, \infty)$ konvexná, jej graf leží nad dotyčnicou. Teda plocha pod grafom tejto funkcie je väčšia ako plocha lichobežníka.



$$\begin{aligned}\frac{1}{n + \frac{1}{2}} &< \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ 0 &< \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \\ 0 &< \ln \frac{a_n}{a_{n+1}}\end{aligned}$$

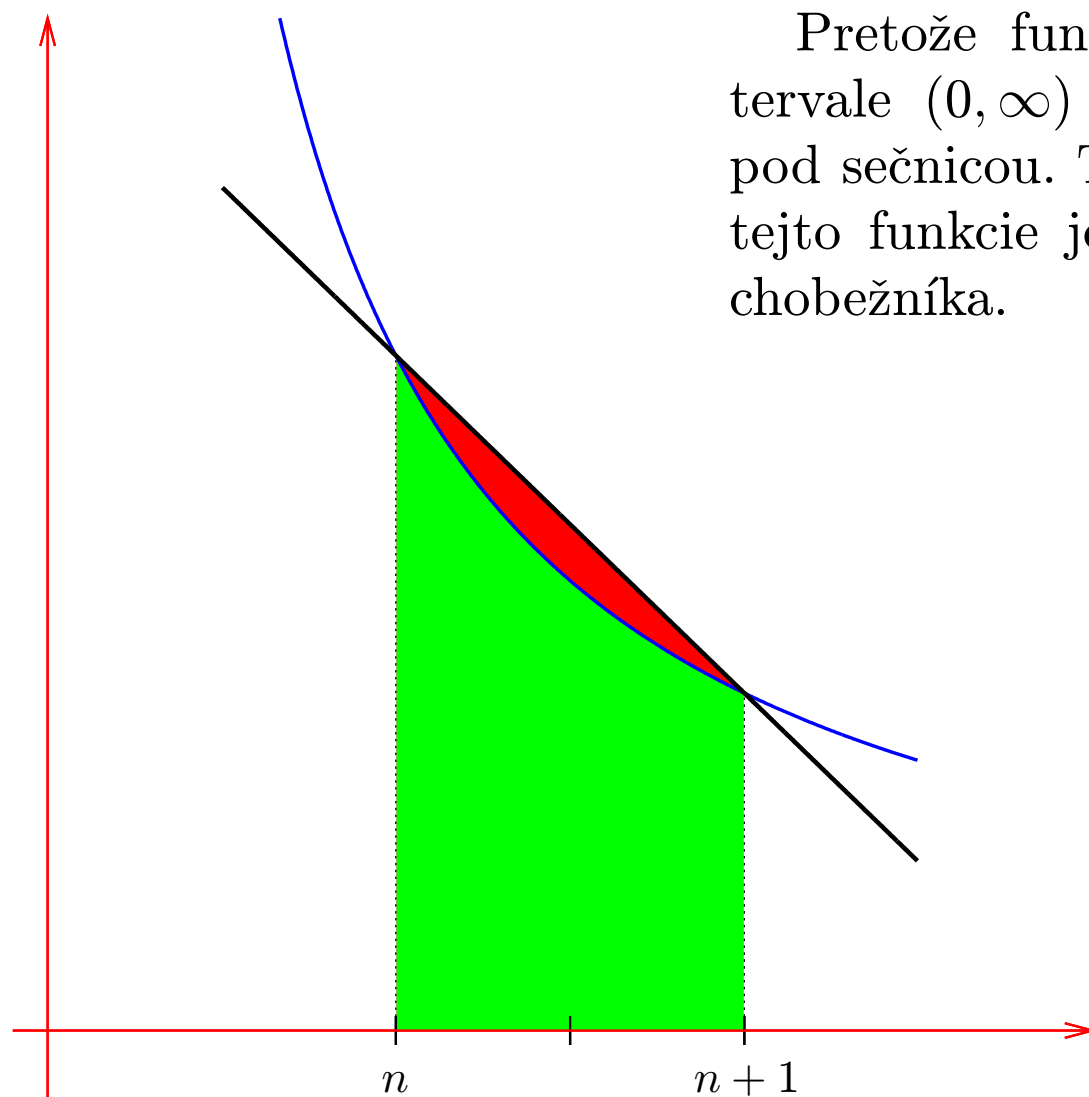
Odtiaľ vyplýva, že ide o klesajúcu postupnosť kladných čísel, teda musí mať limitu. Označme ju a .

Položme

$$b_n = a_n e^{-\frac{1}{4n}}$$

Ukážeme, že ide o rastúcu postupnosť kladných čísel, ktorá má tú istú limitu a .

Pretože funkcia $y = \frac{1}{x}$ je na intervale $(0, \infty)$ konvexná, jej graf leží pod sečnicou. Teda plocha pod grafom tejto funkcie je menšia ako plocha lichobežníka.



$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{n + \frac{1}{2}}{n(n+1)}$$

$$\left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2}{n(n+1)} - 1$$

$$\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\ln a_n - \ln a_{n+1} < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\ln a_n - \frac{1}{4n} < \ln a_{n+1} - \frac{1}{4(n+1)}$$

$$\ln b_n < \ln b_{n+1}$$

Pretože postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesá, platí $a_n > a$. Odtiaľ vyplýva, že

$$n! > a \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n}$$

Pretože postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ rastie, platí $b_n < a$. Odtiaľ vyplýva, že

$$n! < a \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n} \cdot e^{-\frac{1}{4n}}$$

Na výpočet hodnoty a použijeme Wallisov súčin v tvare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{((2n)!)^2 (2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

Overte to!

Odtiaľ vyplýva, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2^{4n} (n!)^4}{((2n)!)^2 (2n+1)}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)! \sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Potom pre

$$a_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n}}$$

máme

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{a_{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)! \sqrt{2n+1}} \cdot \frac{\sqrt{2} \sqrt{2n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$$

Spojíme obidva získané odhady do jedného zápisu:

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{-n} < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{-n + \frac{1}{4n}}$$

Vypočítajte:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

ROVNOMERNÁ KONVERGENCIA (WEIERSTRASS, 1841)

Hovoríme, že postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne k funkcii f na množine A , ak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

V skratke $f_n \xrightarrow{A} f$, alebo len stručne $f_n \Rightarrow f$.

Význam rovnomernej konvergenencie súvisí so zámenou limitných prechodov.

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right]$$

WEIERSTRASSOV M-TEST

Majme daný rad funkcií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ definovaných na množine A . Položme

$$M_n = \sup_{t \in A} |f_n(t)|$$

Ak číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ konverguje, potom funkcionálny rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + n}$ konverguje rovnomerne, ale nie absolútne

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n}$ konverguje absolútne, ale nie rovnomerne (Pringsheim, 1899)

VETA O SPOJITOSTI (CAUCHY, 1853)

Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť spojitych funkcií. Ak $f_n \rightrightarrows f$ na intervale I , potom limitná funkcia f je spojitá na tomto intervale.

Dôkaz. Je založený na nasledujúcich odhadoch

$$|f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(y)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(y) - f(y)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}}$$

Doplnenie detailov dôkazu na domácu úlohu.

VĚTA O INTEGROVANÍ

Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnost' spojitých funkcí. Nech $f_n \rightrightarrows f$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Dôkaz.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon \end{aligned}$$

VĚTA O DERIVOVANÍ

Nech postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k funkcii f na intervale $\langle a, b \rangle$. Predpokladajme, že derivácie f'_n sú spojité na tomto intervale. Ak postupnosť derivácií $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na tomto intervale, potom platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x) \text{ pre každé } x \in \langle a, b \rangle.$$

Dôkaz. Položme $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ pre každé $x \in \langle a, b \rangle$. Teda $f'_n \rightrightarrows g$. Nech $x \in \langle a, b \rangle$. Použijeme vetu o integrovaní na intervale $\langle a, x \rangle$.

$$\int_a^x g(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(x) - f_n(a)] = f(x) - f(a)$$

Potom $f(x) = \int_a^x g(t) dt + f(a)$, odkiaľ $f'(x) = g(x)$.

WEIERSTRASSOVA VETA (1885)

Nech f je reálna funkcia definovaná na intervale $\langle 0, 1 \rangle$. Potom existuje postupnosť mnohočlenov, ktorá konverguje rovnomerne k funkcii f na intervale $\langle 0, 1 \rangle$.

Dôkaz. Použijeme [Bernsteinove polynómy](#) (Bernstein, 1912).

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Podľa binomickej vety máme

$$1 = [x + (1-x)]^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Potom $f(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, teda

$$f(x) - B_n(x) = \sum_{k=0}^n \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

odkiaľ

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Nech $\varepsilon > 0$. Z rovnomernej spojivosti funkcie f vyplýva, že existuje $\delta > 0$ s vlastnosťou

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sčítacie indexy k rozdelíme do dvoch skupín. Tie indexy k , pre ktoré platí $\left|x - \frac{k}{n}\right| < \delta$, budú v skupine A , ostatné budú v skupine B . Zrejme

$$\sum_{k=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k \in A} \dots + \sum_{k \in B} \dots$$

Pre prvý sčítanec máme

$$\begin{aligned} \sum_{k \in A} \underbrace{\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &< \sum_{k \in A} \frac{\varepsilon}{2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^n \frac{\varepsilon}{2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Pretože spojitá funkcia je na uzavretom intervale ohraničená, pre každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$ platí $|f(x)| \leq M$, kde M je konštanta. Potom

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq M + M = 2M$$

Pre $k \in B$ máme

$$\left| x - \frac{k}{n} \right| \geq \delta \quad \text{odkial' } 1 \leq \frac{(nx - k)^2}{n^2 \delta^2}$$

Potom pre druhý sčítanec máme

$$\sum_{k \in B} \underbrace{\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|}_{\leq 2M} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \sum_{k \in B} 2M \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} =$$

Použijeme nerovnosť $1 \leq \frac{(nx-k)^2}{n^2\delta^2}$, ktorá platí pre každé $k \in B$.

$$\begin{aligned}
 &= 2M \sum_{k \in B} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq 2M \sum_{k \in B} \frac{(nx-k)^2}{n^2\delta^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \\
 &= \frac{2M}{n^2\delta^2} \sum_{k \in B} (nx-k)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \\
 &\leq \frac{2M}{n^2\delta^2} \sum_{k=0}^n (nx-k)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}
 \end{aligned}$$

Pretože

$$\begin{aligned}
 (nx-k)^2 \binom{n}{k} &= n^2 x^2 \binom{n}{k} - 2n x k \binom{n}{k} + k^2 \binom{n}{k} = \\
 &= n^2 x^2 \binom{n}{k} + (1-2nx)k \binom{n}{k} + k(k-1) \binom{n}{k}
 \end{aligned}$$

výraz $\sum_{k=0}^n (nx - k)^2 \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}$ sa rozdelí na tri súčty:

$$n^2 x^2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} = n^2 x^2$$

$$\begin{aligned} (1 - 2nx) \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} &= \\ &= (1 - 2nx) \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} x^k (1 - x)^{n-k} = \\ &= (1 - 2nx) nx \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} x^l (1 - x)^{n-1-l} = (1 - 2nx) nx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} = \\
&= n(n-1)x^2 \sum_{l=0}^{n-2} \binom{n-2}{l} x^l (1-x)^{n-2-l} = n(n-1)x^2
\end{aligned}$$

Tieto tri rovnosti teraz použijeme.

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in B} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &\leq \\
&\leq \frac{2M}{n^2 \delta^2} \left[n^2 x^2 + (1-2nx)nx + n(n-1)x^2 \right] = \frac{2M}{n^2 \delta^2} \cdot nx(1-x) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{2M}{n\delta^2} \cdot x(1-x) \leq \frac{2M}{n\delta^2}$$

pretože pre $x \in \langle 0, 1 \rangle$ je $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq 1-x \leq 1$, máme $x(1-x) \leq 1$.

Teraz stačí zvolit' n tak, aby platilo

$$\frac{2M}{n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tý sme ukázali, že platí

$$\sum_{k \in A} \dots + \sum_{k \in B} \dots < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

TANNERYHO VETA (1904)

Nech $s(n) = \sum_{k=0}^n f_k(n)$ pre každé n prirodzené. Predpokladajme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f_k(n) = f_k$, $|f_k(n)| \leq M_k$ pre každé k, n prirodzené. Ak číselný rad $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ konverguje, potom platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(n) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$$

Dôkaz. Nech $\varepsilon > 0$. Pretože rad $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ konverguje, postupnosť jeho zvyškov má limitu nula. Teda existuje m prirodzené také, že pre každé $n \geq m$ platí

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \frac{\varepsilon}{3}$$

Nech k je prirodzené, $k \leq m$. Pretože $\lim_{n \rightarrow \infty} f_k(n) = f_k$, existuje prirodzené číslo n_k také, že pre každé $n \geq n_k$ platí

$$|f_k(n) - f_k| < \frac{\varepsilon}{3(m+1)}$$

Položme $m_0 = \max\{m+1, n_0, n_1, n_2, \dots, n_n\}$. Nech $n \geq m_0$. Potom

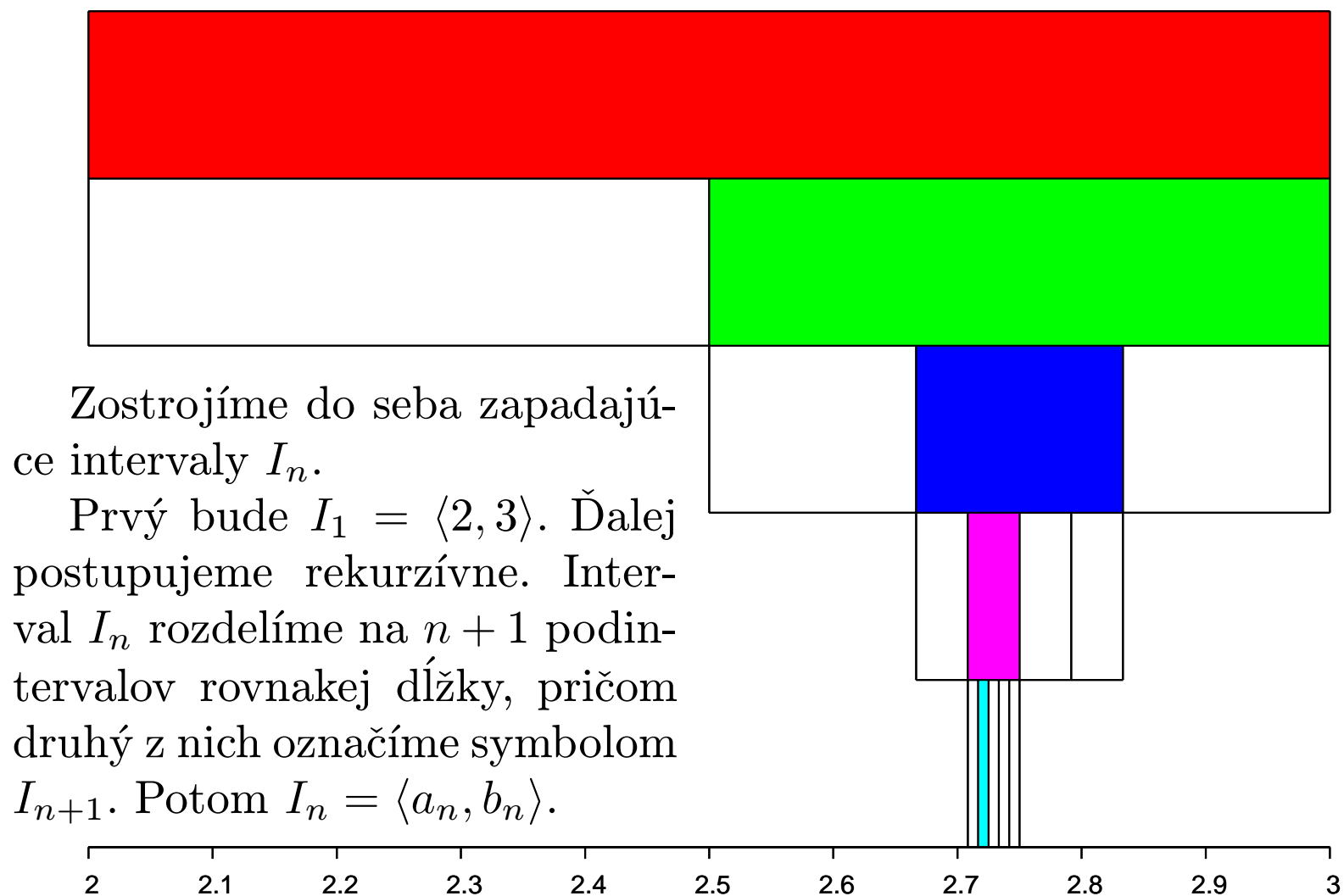
$$\begin{aligned} \left| s(n) - \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right| &= \left| \sum_{k=0}^n f_k(n) - \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right| = \\ &= \left| \sum_{k=0}^m f_k(n) + \sum_{k=m+1}^n f_k(n) - \sum_{k=0}^m f_k - \sum_{k=m+1}^{\infty} f_k \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^m |f_k(n) - f_k| + \sum_{k=m+1}^n |f_k(n)| + \sum_{k=m+1}^{\infty} |f_k| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=0}^m |f_k(n) - f_k| + \sum_{k=m+1}^n M_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} M_k < \\ &< (m+1) \cdot \frac{\varepsilon}{3(m+1)} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Príklad. Položme $f_k(n) = \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k}$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Tanneryho veta zostane v platnosti aj v prípade $s(n) = \sum_{k=0}^{a_n} f_k(n)$, kde a_n sú prirodzené čísla s limitou $+\infty$. Dokážte!

ČÍSLO e JE IRACIONÁLNE

Položme $h_n = b_n - a_n$. Zrejme $h_1 = 1$, $h_n = \frac{h_{n-1}}{n}$. Potom $h_2 = \frac{1}{2}$,
 $h_3 = \frac{1}{2 \cdot 3}$, $h_4 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}$, \dots , $h_n = \frac{1}{n!}$.

Zrejme $a_1 = 2$, $b_1 = 3$. Z popisu konštrukcie vyplýva, že

$$a_n = a_{n-1} + h_n \quad b_n = a_n + h_n$$

Potom

$$\begin{aligned} a_2 &= 2 + \frac{1}{2!} & b_2 &= a_2 + \frac{1}{2!} \\ a_3 &= 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} & b_3 &= a_3 + \frac{1}{3!} \\ a_4 &= 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} & b_4 &= a_4 + \frac{1}{4!} \\ a_5 &= 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} & b_5 &= a_5 + \frac{1}{5!} \end{aligned}$$

Prienik

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{e\}$$

je potom ekvivalentný súčtu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Ak $n > 1$, potom interval I_{n+1} leží ostro medzi koncovými bodmi intervalu I_n , čo sú čísla tvaru $k/n!$ a $(k+1)/n!$, pre nejaké celé k . Z toho vyplýva, že bod ležiaci v ich prieniku nemôže byť zlomkom s menovateľom $n!$ pre žiadne $n \geq 1$. Pretože každé racionálne číslo m/n môže byť zapísané v tvare

$$\frac{m}{n} = \frac{m \cdot (n-1)!}{n!},$$

môžeme urobiť záver, že číslo e je iracionálne.

MOCNINOVÉ RADY $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

ABELOVA VETA (1826)

Ak mocninový rad konverguje v niektorom bode $x_0 \neq 0$, potom konverguje absolútne v každom bode intervalu $(-|x_0|, |x_0|)$.

Dôkaz. Z konverencie daného radu vyplýva, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$. Pretože konvergentná postupnosť je ohraničená, platí

$$|a_n x_0^n| \leq K, \text{ kde } K \text{ je konštanta}$$

Nech x je také, že $|x| < |x_0|$. Položme $q = \frac{|x|}{|x_0|}$. Potom

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| q^n \leq K q^n$$

Pretože $|q| < 1$, stačí použiť porovnávacie kritérium.

POLOMER KONVERGENCIE

Nech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je mocninový rad. Položme

$$q = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Potom daný rad konverguje absolútne pre $|x| < R$ a diverguje pre $|x| > R$, kde

$$R = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ak } 0 < q < +\infty, \\ +\infty, & \text{ak } q = 0, \\ 0, & \text{ak } q = +\infty \end{cases}$$

sa volá **polomer konvergenzie**.

Dôkaz. Nech x je reálne číslo. Potom

$$r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x|q$$

Ak $q = 0$, potom $r = 0$ a daný rad konverguje pre všetky reálne x .

Ak $q = +\infty$, potom pre $x \neq 0$ máme $r = +\infty$, teda daný rad diverguje pre $x \neq 0$.

Ak $0 < q < +\infty$, potom

daný rad konverguje, ak $|x|q < 1$;

daný rad diverguje, ak $|x|q > 1$.

VĚTA O ROVNOMERNEJ KONVERGENCII

Nech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je mocninový rad s polomerom konvergenzie $R > 0$. Ak $0 < K < R$, potom daný rad konverguje rovnomerne na intervale $\langle -K, K \rangle$.

Dôkaz. Ak $x \in \langle -K, K \rangle$, potom $|a_n x^n| \leq |a_n| K^n$. Pritom $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| K^n$ je konvergentný číselný rad (podľa predošlej vety), teda Weierstrassov M-test dáva rovnomernú konvergenciu.

Ak rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, potom rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje rovnomerne na intervale $\langle 0, 1 \rangle$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

TAYLOROV RAD (1715)

Nech je daná funkcia f , ktorá má na intervale $J = (a - \delta, a + \delta)$ derivácie všetkých rádov. Podľa Taylorovej vety pre každé $x \in J$ platí

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

kde

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n$$

a

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} \cdot (x - a)^{n+1}$$

pričom ξ_n leží medzi číslami a a x .

Taylorov rad je mocninový rad, ktorého čiastočné súčty sú Taylorove polynómy. Funkcia f je súčtom svojho Taylorovho radu práve vtedy, keď

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \text{ pre každé } x \in J.$$

Ak sú všetky derivácie funkcie f **rovnomerne ohraničené**, t. j. ak pre každé n prirodzené a pre každé $x \in J$ platí

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq K, \text{ kde } K \text{ je konštanta,}$$

potom funkcia f je súčtom svojho Taylorovho radu.

BORELOVA VETA (1895)

Každý mocninový rad je Taylorovým radom.

Krátky dôkaz je v Amer. Math. Monthly (1981).

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad x \in (-1, 1)$$

$$(1+x)^r = 1 + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \binom{r}{3}x^3 + \dots, \quad x \in (-1, 1)$$

kde r je ľubovoľné reálne číslo (binomický rad).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x \sqrt[3]{1 - x^2}}{x^5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{9} = \frac{19}{90}$$

$$\begin{aligned} \sin(\sin x) &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{6} + \frac{\sin^5 x}{120} + \dots = \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots - \frac{1}{6} \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots \right)^3 + \frac{x^5}{120} + \dots = \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + \dots \end{aligned}$$

$$x \sqrt[3]{1 - x^2} = x(1 - x^2)^{\frac{1}{3}} = x \left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{9} + \dots \right) = x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{9} + \dots$$