ÚLOHY O POSTUPNOSTIACH

Táto zbierka riešených úloh bola vytvorená v roku 1997 pre študentov prvého ročníka učiteľského štúdia PF UPJŠ v Košiciach ako pomocný materiál na cvičenia z predmetu *Matematická analýza*. Riešenia všetkých úloh sú zostavené tak, aby ich bolo možné použiť pred zavedením derivácie. Úlohy, ktoré obsahuje, sa roztrúsene vyskytujú v rôznych učebniciach.

prof. RNDr. Jozef Doboš, CSc.
http://www.jozefdobos.sk

1. Dokážte ohraničenosť postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*, kde*

$$a_n = \frac{n}{2^n}.$$

Riešenie. Indukciou sa ukáže, že $2^n > n$. Teda

$$0 < \frac{n}{2^n} < 1.$$

2. Dokážte ohraničenosť postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*, kde*

$$a_n = \frac{2^n}{n!}.$$

Riešenie. $0 < \dfrac{2^n}{n!} \leq 2.$

3. Dokážte ohraničenosť postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*, kde*

$$a_n = \sqrt{n^2 + (n-1)\cdot \sin n} - n.$$

Riešenie.

$$|a_n| = \frac{(n-1)\cdot |\sin n|}{\sqrt{n^2 + (n-1)\cdot \sin n} + n} \leq \frac{n-1}{2n-1} < \frac{1}{2}.$$

4. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, platí

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3-\frac{1}{n}.$$

Riešenie. (Pre $n = 1$ platí rovnosť.) Pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, máme

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n} = \\
&= 1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} = \\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\frac{n!}{n^n} = \\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\cdot\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{<1} + \frac{1}{3!}\cdot\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{<1}\cdot\underbrace{\frac{n-2}{n}}_{<1} + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\underbrace{\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n^n}}_{<1} < \\
&< 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\cdots+\frac{1}{n!} \leq \\
&\leq 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n} = \\
&= 1+1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = \\
&= 1+1+\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n} = \\
&= 3-\frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

5. Dokážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$a_n = (1+(-1)^n)\cdot n,$$

nie je ohraničená.

Riešenie. Nech $n \in \mathbb{N}$. Potom $a_{2n} = 4n > n$.

6. Dokážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$a_n = n^{(-1)^n},$$

nie je ohraničená.

Riešenie. Nech $n \in \mathbb{N}$. Potom $a_{2n} = 2n > n$.

7. Dokážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$a_n = 2^{n\cdot(-1)^n},$$

nie je ohraničená.

Riešenie. Nech $n \in \mathbb{N}$. Potom $a_{2n} = 2^{2n} = 4^n > n$.

8. Dokážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

je klesajúca.

Riešenie. Z nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom[1] dostávame

$$\sqrt[n+2]{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} < \frac{1 + (n+1)\cdot\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}{n+2},$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

9. Dokážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n},$$

je rastúca.

[1]Nech $x_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Potom

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \le \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

Pritom rovnosť nastáva iba v prípade, že všetky x_i sú rovnaké.

Riešenie. Z nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dostávame

$$\sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1},$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

10. Dokážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=3}^{\infty}$, kde

$$a_n = \sqrt[n]{n},$$

je klesajúca.

Riešenie. Pretože podľa úlohy č. 4 pre všetky $n \geq 3$ platí $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 \leq n$, máme

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}{n^{\frac{1}{n}}} = \left(\underbrace{\frac{1}{n}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{<n}}_{<1}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}} < 1.$$

11. Dokážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$, kde

$$a_n = \log_n(n+1),$$

je klesajúca.

Riešenie.

$$\ln n\cdot\ln\underbrace{\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}}_{<1} < 0 < \ln^2\frac{n+1}{n}$$

$$\ln n\cdot[\ln(n+2)+\ln n-2\cdot\ln(n+1)] < [\ln(n+1)-\ln n]^2$$

$$\ln n\cdot\ln(n+2) < \ln^2(n+1)$$

$$a_{n+1} = \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} < \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = a_n$$

12. Dokážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

je klesajúca.

Riešenie. Ľahko sa overí, že platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1}.$$

Pretože podľa binomickej vety pre každé $x > 0$ a pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí

$$(1+x)^n \geqslant 1 + \binom{n}{1} \cdot x + \binom{n}{2} \cdot x^2,$$

máme

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geqslant \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \left(1 + \frac{n+1}{n(n+2)} + \frac{n+1}{2n(n+2)^2}\right) =$$
$$= \frac{4n^4 + 22n^3 + 40n^2 + 25n + 5}{4n^4 + 22n^3 + 40n^2 + 24n} > 1.$$

13. Dokážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

je rastúca.

Riešenie. Ľahko sa overí, že platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)(2n+1)}{n(2n+3)} \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}.$$

Indukciou možno overiť, že pre každé $x \in (-1; 0)$ a pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, platí

$$(1+x)^n \geqslant 1 + \binom{n}{1} \cdot x + \binom{n}{2} \cdot x^2 + \binom{n}{3} \cdot x^3.$$

Potom

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{(n+2)(2n+1)}{n(2n+3)} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1} + \frac{n}{2(n+1)^3} - \frac{n(n-1)}{6(n+1)^5}\right) =$$
$$= \frac{12n^6 + 78n^5 + 210n^4 + 301n^3 + 243n^2 + 108n + 20}{12n^6 + 78n^5 + 210n^4 + 300n^3 + 240n^2 + 102n + 18} > 1.$$

Predošlá nerovnosť platí aj pre $n = 1$.

14. Vypočítajte

$$\lim_{n \to \infty} q^n,$$

kde $0 < |q| < 1$.

Riešenie 1. Ukážeme, že táto limita sa rovná nule. Nech $\varepsilon > 0$. Podľa Archimedovej vlastnosti existuje $m \in \mathbb{N}$ také, že

$$\frac{1}{\varepsilon} < \left(\frac{1}{|q|}\right)^m .$$

Potom pre každé $n \geq m$ platí

$$|q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon.$$

Tým sme ukázali, že $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Riešenie 2. Položme[2] $a_n = |q|^n$. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca a zdola ohraničená, teda má limitu. Označme ju symbolom ℓ. Potom

$$a_{n+1} = |q| \cdot a_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = |q| \cdot \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \ell = |q| \cdot \ell \Rightarrow \ell = 0.$$

> *15. Vypočítajte*
> $$\lim_{n\to\infty} q^n.$$

Riešenie. Prípad $0 < |q| < 1$ je vyriešený v úlohe č. 14. V prípade $|q| > 1$ stačí použiť nasledujúce tvrdenie:

Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť kladných (záporných) čísel, ktorej limita je rovná nule, potom $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = +\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = -\infty\right)$.

Ostatné prípady sú triviálne.

Odpoveď.

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{ak } |q| < 1 \\ 1 & \text{ak } q = 1 \\ +\infty & \text{ak } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{ak } q \leqslant -1 \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} q^{2n} = \begin{cases} +\infty & \text{ak } q < -1 \\ 1 & \text{ak } q = -1 \end{cases} \\[2ex] \lim\limits_{n\to\infty} q^{2n+1} = \begin{cases} -\infty & \text{ak } q < -1 \\ -1 & \text{ak } q = -1 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

> *16. Vypočítajte*
> $$\lim_{n\to\infty} n \cdot q^n,$$
> *kde* $0 < |q| < 1$.

[2] Pre ľubovoľnú postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ zrejme platí: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = 0$.

Riešenie. Ukážeme, že táto limita sa rovná nule. Položme $a_n = n \cdot |q|^n$. Nech $n_0 \in \mathbb{N}$ je také, že $\dfrac{|q|}{1-|q|} < n_0$. Potom pre všetky $n \geq n_0$ platí

$$0 < a_{n+1} = a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot |q| < a_n,$$

teda postupnosť $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ je zdola ohraničená a klesajúca. Označme jej limitu symbolom ℓ. Potom platí

$$\ell = \ell \cdot |q| \Rightarrow \ell = 0.$$

17. Vypočítajte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n},$$

kde $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$.

Riešenie. Ukážeme, že táto limita sa rovná nule. Položme

$$a_n = \frac{n^k}{a^n}.$$

Nech $n_0 \in \mathbb{N}$ je také, že $\dfrac{1}{\sqrt[k]{a}-1} < n_0$. Potom pre všetky $n \geq n_0$ platí

$$0 < a_{n+1} = a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a} < a_n.$$

Teda postupnosť $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ je zdola ohraničená a klesajúca. Označme jej limitu symbolom ℓ. Potom

$$\ell = \ell \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow \ell = 0.$$

18. Vypočítajte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

Riešenie. Ukážeme, že táto limita sa rovná nule. Pre $n \geq 2$ máme

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{2}{n} \leq 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

19. Vypočítajte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}.$$

Riešenie 1. Ukážeme, že každé $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, platí

$$1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Skutočne, pre $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, podľa binomickej vety máme

$$\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot \sqrt{\frac{2}{n}} + \binom{n}{2} \cdot \frac{2}{n} + \cdots + \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n > 1 + \binom{n}{2} \cdot \frac{2}{n} = n.$$

Teda $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Riešenie 2. Ukážeme, že pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, platí

$$1 < \sqrt[n]{n} < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2.$$

Skutočne, pre $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, podľa binomickej vety máme

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n} + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n > \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Riešenie 3. Podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom pre $n > 1$ platí

$$1 < \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{1^{n-2} \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} < \frac{\overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{n-2 \text{ členov}} + \sqrt{n} + \sqrt{n}}{n} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}},$$

teda pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, máme

$$1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Riešenie 4. Ukážeme, že pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$, platí

$$1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Skutočne, pre $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, podľa binomickej vety platí

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n > 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}}.$$

K dokončeniu riešenia úlohy stačí overiť, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, platí

$$\binom{n}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}} \geqslant n.$$

Presvedčia nás o tom nasledujúce ekvivalentné úpravy:

$$\begin{aligned}\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+\binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n\cdot\sqrt{n}}&\geqslant n-\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n},\\ \sqrt{n}+\frac{(n-1)(n-2)}{6\cdot\sqrt{n}}&\geqslant n-\frac{n-1}{2},\\ \frac{(n+1)(n+2)}{6\cdot\sqrt{n}}&\geqslant\frac{n+1}{2},\\ n+2&\geqslant 3\cdot\sqrt{n},\\ (\sqrt{n}-2)(\sqrt{n}-1)&\geqslant 0.\end{aligned}$$

Presvedčte sa o tom, že nerovnosť $\sqrt[n]{n}<1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ platí aj pre $n\in\{1,2,3\}$.

Riešenie 5. Podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom pre $n\geqslant 4$ platí

$$\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{1^{n-4}\cdot 2^2\cdot\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^2}<\frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n-4\ \text{členov}}+2+2+\frac{\sqrt{n}}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}}{n}=1+\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

> *20. Vypočítajte*
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}.$$

Riešenie.

$$0<\frac{1}{\sqrt{n!}}<\frac{2}{n}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}=0.$$

> *21. Vypočítajte*
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Riešenie. Indukciou sa overí, že

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!,$$

teda

$$0<\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\frac{e}{n}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$$

> *22. Vypočítajte*
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Riešenie. Vychádzame zo skutočnosti, že

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Indukciou sa overí, že

$$\frac{e^{n-1}}{n} < \frac{n^n}{n!} < e^{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Odtiaľ

$$\frac{e}{\sqrt[n]{e}\cdot\sqrt[n]{n}} < \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{e}{\sqrt[n]{e}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

23. Vypočítajte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Riešenie 1. Ukážeme, že táto limita sa rovná nule. Položme $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Potom

$$0 < a_{n+1} = \frac{a_n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < a_n,$$

teda daná postupnosť je zdola ohraničená a klesajúca. Označme jej limitu symbolom ℓ. Potom

$$\ell = \frac{\ell}{e} \Rightarrow \ell = 0.$$

Riešenie 2. Z nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dostávame

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} < \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{n+1}{2},$$
$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n,$$
$$0 < \frac{n!}{n^n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Teda $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

24. Vypočítajte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n},$$

kde $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$.

Riešenie. Ukážeme, že táto limita sa rovná nule. Nech $\varepsilon > 0$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je také, že platí $\frac{1}{\varepsilon} < k$. Pretože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0,$$

existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $n \geq n_0$ platí

$$0 < \frac{n^k}{a^n} < 1.$$

Nech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Potom $n^k < a^n$, teda $k \cdot \log_a n < n$, t.j.

$$\left| \frac{\log_a n}{n} - 0 \right| = \frac{\log_a n}{n} < \frac{1}{k} < \varepsilon.$$

25. Vypočítajte

$$\lim_{n\to\infty} \log_n 2.$$

Riešenie. Zrejme pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí

$$a_n = \log_n 2 = \frac{\ln 2}{\ln n}.$$

Ukážeme, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Nech $\varepsilon > 0$. Zvoľme $k \in \mathbb{N}$ také, že $\frac{1}{\varepsilon} < k$. Položme $n_0 = 2^k$. Nech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Potom

$$|a_n - 0| = a_n \leq \frac{1}{k} < \varepsilon.$$

26. Vypočítajte

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right].$$

Riešenie. Pretože podľa úlohy č. 13 a podľa úlohy č. 12 platí

$$\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

máme

$$\frac{n}{2n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n \cdot \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] < \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Odtiaľ vyplýva, že platí

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] = \frac{e}{2}.$$

27. Vypočítajte limitu postupnosti danej rekurentne

$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{2 + a_{n-1}}.$$

Riešenie. Indukciou sa overí, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2 + a_n} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n.$$

Teda daná postupnosť je zdola ohraničená a klesajúca. Označme jej limitu symbolom ℓ. Potom

$$\ell = \frac{\ell}{2 + \ell} \Rightarrow \ell = 0.$$

28. Vypočítajte limitu postupnosti danej rekurentne

$$a_1 = a > 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}.$$

Riešenie. Indukciou sa overí, že

$$0 < a_n < a_{n+1} \leq \frac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2}.$$

Teda postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a zhora ohraničená. Označme jej limitu symbolom ℓ. Potom

$$\ell = \sqrt{a + \ell} \Rightarrow \ell = \frac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2}.$$

29. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná vzťahmi $a_1 = 1$, $n \cdot a_{n+1} = (n + 1) \cdot a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Nájdite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n^2}.$$

Riešenie. $a_n = n$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n^2} = \frac{1}{2}$.

30. Vypočítajte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \cdot \sin n!}{n + 1}$$

Riešenie. Ukážeme, že táto limita sa rovná nule. Pretože

$$-1 \leq \sin n! \leq 1,$$

platí

$$-\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} \le \frac{\sqrt[3]{n^2}\cdot \sin n!}{n+1} < \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}.$$

Pritom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} = 0.$$

31. Vypočítajte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+5^n}.$$

Riešenie.

$$5 = \sqrt[n]{0+5^n} < \sqrt[n]{2^n+5^n} < \sqrt[n]{5^n+5^n} = 5\cdot \sqrt[n]{2} \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+5^n} = 5.$$

32. Vypočítajte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+n+1}.$$

Riešenie.

$$1 < \sqrt[n]{n^3+n+1} \le \sqrt[n]{3n^3} = \sqrt[n]{3}\cdot(\sqrt[n]{n})^3 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+n+1} = 1.$$

33. Vypočítajte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^\pi+2^\pi+3^\pi+\cdots+n^\pi}.$$

Riešenie.

$$1 < \sqrt[n]{1^\pi+2^\pi+\cdots+n^\pi} \le \sqrt[n]{n\cdot n^\pi} = (\sqrt[n]{n})^{1+\pi} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^\pi+2^\pi+\cdots+n^\pi} = 1.$$

34. Vypočítajte

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}\right).$$

Riešenie. pre $n \ge 2$ platí

$$\frac{n}{\sqrt[3]{n^3+n}} < \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}} < \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}\right)=1.$$

35. Vypočítajte

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}.$$

Riešenie. Položme

$$a_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}.$$

Potom

$$a_n^2=\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n-1)^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n)^2}=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\frac{(2n-1)\cdot(2n+1)}{(2n)^2}\cdot\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2n+1},$$

teda

$$0<a_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

36. Vypočítajte

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{n}\right|.$$

Riešenie. Ukážeme, že táto limita sa rovná číslu $\frac{1}{2}$. Položme

$$s_n=1-2+3-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot n.$$

Potom $s_{2k}=\underbrace{(1-2)}_{=-1}+\underbrace{(3-4)}_{=-1}+\cdots+\underbrace{((2k-1)-2k)}_{=-1}=-k$. Teda $\frac{s_{2k}}{2k}=-\frac{1}{2}$. Podobne $s_{2k+1}=s_{2k}+(2k+1)=-k+2k+1=k+1$. Teda $\frac{s_{2k+1}}{2k+1}=\frac{k+1}{2k+1}$. Potom

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{s_{2k}}{2k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{s_{2k+1}}{2k+1}\right|=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{s_n}{n}\right|=\frac{1}{2}.$$

37. Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak

$$a_n=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$$

Riešenie. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zrejme rastúca. Ukážeme, že je zhora ohraničená. Nech $n > 1$ je prirodzené číslo. Nech k je prirodzené číslo, $k > n$. Potom platí

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k > 1 + \binom{k}{1}\cdot\frac{1}{k} + \binom{k}{2}\cdot\frac{1}{k^2} + \binom{k}{3}\cdot\frac{1}{k^3} + \dots + \binom{k}{n}\cdot\frac{1}{k^n} =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{k}\right).$$

Potom

$$e = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \geq \lim_{k\to\infty}\left(1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right) + \cdots\right.$$
$$\left.\cdots + \frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{k}\right)\right) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} = a_n.$$

Pretože postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca, pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < e$. Pretože pre každé prirodzené číslo i, $1 < i \leq n$, platí

$$\binom{n}{i} < \frac{n^i}{i!},$$

máme

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^n} < a_n.$$

Teda

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < a_n < e \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = e.$$

38. Vypočítajte

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}\right).$$

Riešenie. Položme $a_n = \dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\dfrac{4^3-1}{4^3+1}\cdots\dfrac{n^3-1}{n^3+1}$. Potom

$$a_n = \frac{1\cdot 7}{3\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 13}{4\cdot 7}\cdot\frac{3\cdot 21}{5\cdot 13}\cdot\frac{4\cdot 31}{6\cdot 21}\cdots\frac{(n-1)\cdot(n^2+n+1)}{(n+1)\cdot(n^2-1+1)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}.$$

39. Vypočítajte

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(\pi\cdot\sqrt{n^2+1}\right).$$

Riešenie.

$$\sin\left(\pi\cdot\sqrt{n^2+1}\right)=(-1)^n\cdot\sin\left(\pi\cdot\sqrt{n^2+1}-n\pi\right)=(-1)^n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sin\left(\pi\cdot\sqrt{n^2+1}\right)=0.$$

40. Vypočítajte

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\cdot\sqrt{n^2+n}\right).$$

Riešenie.

$$\sin^2\left(\pi\cdot\sqrt{n^2+n}\right)=\sin^2\left(\pi\cdot\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)=\sin^2\left(\frac{\pi n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\cdot\sqrt{n^2+n}\right)=1.$$

41. Vypočítajte

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\cdot\sqrt{n^2+2n}\right).$$

Riešenie.

$$\sin^2\left(\pi\cdot\sqrt{n^2+2n}\right)=\sin^2\left(\pi\cdot\sqrt{n^2+2n}-n\pi\right)=\sin^2\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{n^2+2n}+n}\right)$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\cdot\sqrt{n^2+2n}\right)=0.$$

42. Vypočítajte

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot\sin(2\pi n!e).$$

Riešenie. Položme

$$x_n=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!},\quad a_n=(e-x_n)\cdot n!,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Nech n je prirodzené číslo. Potom

$$n!\cdot e=\underbrace{n!\cdot x_n}_{\in\mathbb{Z}}+a_n,$$

teda

$$\sin(2\pi n!e)=\sin(2\pi n!x_n+2\pi a_n)=\sin(2\pi a_n),$$

odkiaľ

$$\sin(2\pi n!e) = \sin(2\pi a_n). \tag{1}$$

Teraz ukážeme, že platí

$$\frac{1}{n+1} < a_n < \frac{1}{n}. \tag{2}$$

Nech k je prirodzené číslo. Pretože

$$\frac{1}{n+1} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{<\frac{1}{(n+1)^2}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}}_{<\frac{1}{(n+1)^k}} <$$

$$< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{n+1}\right)^k}{1-\frac{1}{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\left[1-\left(\frac{1}{n+1}\right)^k\right]}_{<1} < \frac{1}{n},$$

platí

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+k)!} < \frac{1}{n \cdot n!},$$

teda

$$x_{n+k} = x_n + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+k)!} < x_n + \frac{1}{n \cdot n!},$$

čiže

$$x_{n+k} < x_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Položme

$$y_n = x_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

pre každé $n \in \mathbb{N}$. Ľahko sa overí, že postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca. Potom

$$e = \lim_{k\to\infty} x_{n+k} < y_n.$$

Počítajme

$$x_n + \frac{1}{(n+1)!} = x_{n+1} < e < x_n + \frac{1}{n \cdot n!},$$

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - x_n < \frac{1}{n \cdot n!},$$

$$\frac{1}{n+1} < \underbrace{(e - x_n) \cdot n!}_{=a_n} < \frac{1}{n}.$$

Tým sme dokázali, že (2) platí. Odtiaľ vyplýva, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{3}$$

Podľa (2) máme

$$\frac{n}{n+1} < n \cdot a_n < 1,$$

teda

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = 1. \tag{4}$$

Potom podľa (1) a (4) platí

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \sin(2\pi n! e) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \sin(2\pi a_n) = 2\pi \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(2\pi a_n)}{2\pi a_n}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n}_{=1} = 2\pi.$$

> *43. Dokážte, že číslo e je iracionálne.*

Riešenie. Sporom. Predpokladajme, že $e = \dfrac{m}{n}$, kde m a n sú prirodzené čísla. Položme

$$x_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

V predošlej úlohe bolo ukázané, že platí

$$x_n < e < x_n + \frac{1}{n \cdot n!},$$

t.j.

$$x_n < \frac{m}{n} < x_n + \frac{1}{n \cdot n!},$$

odkiaľ

$$\underbrace{x_n \cdot n!}_{\in \mathbb{N}} < \underbrace{\frac{m}{n} \cdot n!}_{\in \mathbb{N}} < x_n \cdot n! + \frac{1}{n},$$

čo je spor.

> *44. Vypočítajte*
> $$\lim_{n\to\infty} \sin\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n \cdot \pi\right].$$

Riešenie. Ukážeme, že táto limita sa rovná nule. Položme $\alpha_n = (2+\sqrt{3})^n \cdot \pi$. Potom existujú $A_n, B_n \in \mathbb{N}$ také, že

$$\alpha_n = (A_n + B_n \cdot \sqrt{3}) \cdot \pi.$$

Položme
$$\beta_n = (2-\sqrt{3})^n \cdot \pi = (A_n - B_n \cdot \sqrt{3}) \cdot \pi.$$
Potom platí $\alpha_n + \beta_n = 2A_n\pi$, teda $\alpha_n = 2A_n\pi - \beta_n$, odkiaľ $\sin\alpha_n = -\sin\beta_n$. Postupnosť $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická s kvocientom $q = 2-\sqrt{3}$, $0 < q < 1$. Teda $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, odkiaľ
$$\lim_{n\to\infty} \sin\alpha_n = -\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0.$$

45. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ sú a_n a b_n celé čísla, definované rovnosťou
$$(1+\sqrt{3})^n = a_n + b_n \cdot \sqrt{3}.$$
Vypočítajte
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Riešenie. Stačí si všimnúť, že platí $(1-\sqrt{3})^n = a_n - b_n \cdot \sqrt{3}$. Potom
$$a_n = \frac{1}{2} \cdot [(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n], \quad b_n = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot [(1+\sqrt{3})^n - (1-\sqrt{3})^n].$$
Teda $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \sqrt{3}$.

46. Nájdite všetky limitné hodnoty postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak
$$a_n = (-1)^n \cdot n.$$

Riešenie.
$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} 2k = +\infty, \quad \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} (-2k-1) = -\infty.$$

Odpoveď. $-\infty$; $+\infty$.

47. Nájdite všetky limitné hodnoty postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak
$$a_n = (-1)^{n-1} \cdot \left(2 + \frac{3}{n}\right).$$

Riešenie.
$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} \left(-2 - \frac{3}{2k}\right) = -2,$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(2+\frac{3}{2k+1}\right) = 2.$$

Odpoveď. -2; 2.

48. Nájdite všetky limitné hodnoty postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, *ak*

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}.$$

Riešenie.

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2k}+1\right) = 1,$$
$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{2k+1}+0\right) = 0.$$

Odpoveď. 0; 1.

49. Nájdite všetky limitné hodnoty postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, *ak*

$$a_n = \sqrt[n]{1+2^{n\cdot(-1)^n}}.$$

Riešenie. Pretože
$$a_{2k} = \sqrt[2k]{1+2^{2k}}, \quad 2 < a_{2k} < 2\cdot 2^{\frac{1}{2k}},$$
platí $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = 2$. Pretože

$$a_{2k+1} = \sqrt[2k+1]{1+\frac{1}{2^{2k+1}}}, \quad 1 < a_{2k+1} < 2^{\frac{1}{2k+1}},$$

platí $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = 1$.

Odpoveď. 1; 2.

50. Nájdite všetky limitné hodnoty postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, *ak*

$$a_n = \frac{n-1}{n+1}\cdot\cos\frac{2\pi n}{3}.$$

Riešenie.

$$\lim_{k\to\infty} a_{3k} = \lim_{k\to\infty}\frac{3k-1}{3k+1} = 1,$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{3k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{3k}{3k+2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2},$$
$$\lim_{k\to\infty} a_{3k+2} = \lim_{k\to\infty} \frac{3k+1}{3k+3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Odpoveď. $-\frac{1}{2}$; 1.

51. Nájdite všetky limitné hodnoty postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak

$$a_n = \cos^n \frac{2\pi n}{3}.$$

Riešenie.

$$\lim_{k\to\infty} a_{3k} = \lim_{k\to\infty} \cos^{3k} 2k\pi = 1,$$
$$\lim_{k\to\infty} a_{3k+1} = \lim_{k\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{3k+1} = 0,$$
$$\lim_{k\to\infty} a_{3k+2} = \lim_{k\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{3k+2} = 0.$$

Odpoveď. 0; 1.

52. Nájdite všetky limitné hodnoty postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak

$$a_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cdot \cos \frac{\pi n}{2}.$$

Riešenie.

$$\lim_{k\to\infty} a_{4k} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{4k}{4k+1} \cdot \cos 0\right) = 2,$$
$$\lim_{k\to\infty} a_{4k+1} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{4k+1}{4k+2} \cdot \cos \frac{\pi}{2}\right) = 1,$$
$$\lim_{k\to\infty} a_{4k+2} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{4k+2}{4k+3} \cdot \cos \pi\right) = 0,$$
$$\lim_{k\to\infty} a_{4k+3} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{4k+3}{4k+4} \cdot \cos \frac{3\pi}{2}\right) = 1.$$

Odpoveď. 0; 1; 2.

53. Nájdite všetky limitné hodnoty postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak

$$a_n = 1 + n \cdot \sin \frac{\pi n}{2}.$$

Riešenie.

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} a_{4k} &= \lim_{k\to\infty} (1 + 4k \cdot \sin 0) = 1, \\
allowdisplaybreak \lim_{k\to\infty} a_{4k+1} &= \lim_{k\to\infty} \left(1 + (4k+1) \cdot \sin \frac{\pi}{2}\right) = +\infty, \\
\lim_{k\to\infty} a_{4k+2} &= \lim_{k\to\infty} (1 + (4k+2) \cdot \sin \pi) = 1, \\
\lim_{k\to\infty} a_{4k+3} &= \lim_{k\to\infty} \left(1 + (4k+3) \cdot \sin \frac{3\pi}{2}\right) = -\infty.
\end{aligned}$$

Odpoveď. $-\infty$; 1; $+\infty$.

54. Nájdite všetky limitné hodnoty postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*, ak*

$$a_n = 1 + 2 \cdot (-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\binom{n}{2}}.$$

Riešenie. $a_{4k} = 2, \quad a_{4k+1} = 6, \quad a_{4k+2} = -4, \quad a_{4k+3} = 0.$

Odpoveď. -4; 0; 2; 6.

55. Nájdite všetky limitné hodnoty postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*, ak*

$$a_n = \frac{n}{n+1} \cdot \sin^2 \frac{\pi n}{4}.$$

Riešenie.

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} a_{4k} &= \lim_{k\to\infty} \frac{4k}{4k+1} \cdot \sin^2 0 = 0, \\
\lim_{k\to\infty} a_{4k+1} &= \lim_{k\to\infty} \frac{4k+1}{4k+2} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}, \\
\lim_{k\to\infty} a_{4k+2} &= \lim_{k\to\infty} \frac{4k+2}{4k+3} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1, \\
\lim_{k\to\infty} a_{4k+3} &= \lim_{k\to\infty} \frac{4k+3}{4k+4} \cdot \sin^2 \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Odpoveď. 0; $\frac{1}{2}$; 1.

56. Nájdite všetky limitné hodnoty postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*, ak*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n + \sin \frac{\pi n}{4}.$$

Riešenie.

$$\lim_{k\to\infty} a_{8k} = \lim_{k\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{8k}\right)^{8k}+0\right) = e,$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{8k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(-\left(1+\frac{1}{8k+1}\right)^{8k+1}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -e+\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{8k+2} = \lim_{k\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{8k+2}\right)^{8k+2}+1\right) = e+1,$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{8k+3} = \lim_{k\to\infty}\left(-\left(1+\frac{1}{8k+3}\right)^{8k+3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -e+\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{8k+4} = \lim_{k\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{8k+4}\right)^{8k+4}+0\right) = e,$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{8k+5} = \lim_{k\to\infty}\left(-\left(1+\frac{1}{8k+5}\right)^{8k+5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -e-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{8k+6} = \lim_{k\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{8k+6}\right)^{8k+6}-1\right) = e-1,$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{8k+7} = \lim_{k\to\infty}\left(-\left(1+\frac{1}{8k+7}\right)^{8k+7}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -e-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Odpoveď. $-e-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-e+\frac{\sqrt{2}}{2}$; $e-1$; e; $e+1$.

57. Definujme postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vzťahom

$$a_n = \sqrt{n} - \left[\sqrt{n}\right], \quad n\in\mathbb{N}$$

(kde symbolom $[x]$ označujeme celú časť reálneho čísla x). Dokážte, že pre každé $\alpha\in[0,1]$ existuje podpostupnosť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že platí

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha.$$

Riešenie. Položme

$$n_k = k^2 + 2\cdot[\alpha k], \quad k\in\mathbb{N}.$$

Najskôr ukážeme, že $\left[\sqrt{n_k}\right] = k$. Skutočne,

$$k^2 \le k^2 + \underbrace{2\cdot[\alpha k]}_{\ge 0} \le k^2 + 2\cdot\alpha k \le k^2+2k < k^2+2k+1 = (k+1)^2,$$

teda

$$k \le \sqrt{k^2+2\cdot[\alpha k]} < k+1.$$

Potom
$$a_{n_k} = \sqrt{n_k} - [\sqrt{n_k}\,] = \sqrt{k^2 + 2 \cdot [\alpha k]} - k,$$
teda
$$a_{n_k} = \frac{k^2 + 2 \cdot [\alpha k] - k^2}{\sqrt{k^2 + 2 \cdot [\alpha k]} + k} = \frac{2 \cdot [\alpha k]}{\sqrt{k^2 + 2 \cdot [\alpha k]} + k} \le \frac{2\alpha k}{\sqrt{k^2} + k} = \alpha.$$
Ďalej platí
$$\begin{gathered}
\alpha k < [\alpha k] + 1 \\
2\alpha k < 2 \cdot [\alpha k] + 2 \\
k^2 + 2\alpha k < k^2 + 2 \cdot [\alpha k] + 2 \\
k^2 + 2\alpha k - 2 < k^2 + 2 \cdot [\alpha k] \\
\sqrt{k^2 + 2\alpha k - 2} < \sqrt{k^2 + 2 \cdot [\alpha k]}, \quad (k > 1) \\
\sqrt{k^2 + 2\alpha k - 2} - k < \sqrt{k^2 + 2 \cdot [\alpha k]} - k = a_{n_k} \\
\frac{k^2 + 2\alpha k - 2 - k^2}{\sqrt{k^2 + 2\alpha k - 2} + k} < a_{n_k}.
\end{gathered}$$
Teda
$$\frac{2\alpha k - 2}{\sqrt{k^2 + 2\alpha k - 2} + k} < a_{n_k} \le \alpha,$$
odkiaľ vyplýva, že $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$.

58. Dokážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*, kde*
$$a_n = \sin n,$$
diverguje.

Riešenie. Sporom. Predpokladajme, že daná postupnosť konverguje k číslu ℓ. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n+2) = \ell$, odkiaľ
$$\lim_{n\to\infty} (\sin(n+2) - \sin n) = 0.$$
Pretože $\sin(n+2) - \sin n = 2 \cdot \sin 1 \cdot \cos(n+1)$, máme

(1)
$$\lim_{n\to\infty} \cos(n+1) = 0.$$

Pretože $\cos(n+1) = \cos n \cdot \cos 1 - \sin n \cdot \sin 1$, máme
$$\sin n = \frac{1}{\sin 1} \cdot (\cos n \cdot \cos 1 - \cos(n+1)),$$
teda

(2)
$$\lim_{n\to\infty} \sin n = 0.$$

Ale vzťahy (1) a (2) sú v spore s rovnosťou $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$. Tým sme dokázali, že daná postupnosť nemá limitu.

59. Uveďte príklad ohraničenej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pre ktorú platí

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0,$$

ale ktorá nemá limitu.

Riešenie. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \sin\sqrt{n}$, má divergentnú podpostupnosť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, kde $n_k = k^2$. Pretože

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - a_n| &= |\sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}| = \\ &= 2 \cdot \left|\cos\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\right| \leq \\ &\leq 2 \cdot \sin\frac{1}{2\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}, \end{aligned}$$

platí

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0.$$

60. Uveďte príklad ohraničenej postupnosti kladných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pre ktorú platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

ale ktorá nemá limitu.

Riešenie. Položme

$$a_n = 2 + \sin\sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ukážeme, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Skutočne,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right| = \left|\frac{2+\sin\sqrt{n+1}}{2+\sin\sqrt{n}} - 1\right| \leq |\sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}\,|.$$

K dokončeniu riešenia sa stačí odvolať na riešenie úlohy č. 59.

61. Položme

$$a_n = \alpha n - [\alpha n], \quad n \in \mathbb{N},$$

kde α je dané iracionálne číslo. (Symbol $[x]$ označuje celú časť reálneho čísla x.) Ukážte, že v každom intervale $I \subset \langle 0, 1\rangle$ sa nachádzajú členy postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Riešenie. Nie je ťažké overiť (sporom), že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je prostá a že všetky jej členy sú iracionálne čísla. Nech $I = (c, d)$, kde $0 < c < d < 1$. Položme $a = d - c > 0$. Nech $m \in \mathbb{N}$ je také, že $\frac{1}{m} < a$.
Ukážeme, že existujú $r, s \in \{1, 2, \ldots, m+1\}$, $r < s$, také, že platí

$$|a_s - a_r| < \frac{1}{m}.$$

Pretože všetky a_n sú iracionálne, každé z nich leží v niektorom z intervalov

$$I_1 = \left(0, \frac{1}{m}\right), I_2 = \left(\frac{1}{m}, \frac{2}{m}\right), I_3 = \left(\frac{2}{m}, \frac{3}{m}\right), \ldots, I_m = \left(\frac{m-1}{m}, \frac{m}{m}\right).$$

Podľa Dirichletovho princípu $m+1$ bodov možno rozdeliť do m intervalov len tak, že v niektorom z nich sú aspoň dva body. Označme ich a_r, a_s. Potom ich vzdialenosť je menšia ako dĺžka tohto intervalu, t.j.

$$|a_s - a_r| < \frac{1}{m}.$$

Potom

$$|\alpha s - [\alpha s] - \alpha r + [\alpha r]| < \frac{1}{m},$$

t.j.

$$|\alpha(s-r) - \underbrace{([\alpha s] - [\alpha r])}_{\in \mathbb{Z}}| < \frac{1}{m}. \tag{1}$$

Teraz ukážeme, že existuje $n \in \mathbb{N}$ s vlastnosťou

$$0 < \alpha n - [\alpha n] < \frac{1}{m}. \tag{2}$$

Pretože

$$\begin{aligned} [\alpha s] &< \alpha s < [\alpha s] + 1, \\ [\alpha r] &< \alpha r < [\alpha r] + 1, \end{aligned}$$

platí

$$\underbrace{[\alpha s] - [\alpha r] - 1}_{\in \mathbb{Z}} < \alpha s - \alpha r < \underbrace{[\alpha s] - [\alpha r] + 1}_{\in \mathbb{Z}},$$

teda máme dve možnosti

1) $$[\alpha(s-r)] = [\alpha s] - [\alpha r],$$
2) $$[\alpha(s-r)] = [\alpha s] - [\alpha r] - 1.$$

V prípade 1) podľa (1) platí

$$0 < \alpha(s-r) - [\alpha(s-r)] < \frac{1}{m}.$$

Teda (2) platí (stačí položiť $n = s - r$). V prípade 2) podľa (1) platí

$$0 < 1 + [\alpha(s-r)] - \alpha(s-r) < \frac{1}{m},$$

odkiaľ

$$1 - \frac{1}{m} < \alpha(s-r) - [\alpha(s-r)] < 1,$$

t.j.

$$1 - \frac{1}{m} < x - [x] < 1, \tag{3}$$

kde sme položili $x = \alpha(s-r)$. Ukážeme, že existuje $k \in \mathbb{N}$, $k \geq m$, také, že

$$0 < kx - [kx] < \frac{1}{m}. \tag{4}$$

Položme

$$k = \left[\frac{1-\frac{1}{m}}{1-x+[x]}\right] + 1. \tag{5}$$

Najskôr ukážeme, že platí $k \geq m$. (Zrejme $k \in \mathbb{Z}$.) Podľa (3) platí

$$0 < 1 - x + [x] < \frac{1}{m}, \tag{6}$$

teda

$$\frac{1}{1-x+[x]} > m,$$

odkiaľ

$$\frac{1-\frac{1}{m}}{1-x+[x]} > \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdot m = m - 1,$$

čo dáva

$$k = \left[\frac{1-\frac{1}{m}}{1-x+[x]}\right] + 1 \geq (m-1) + 1 = m.$$

Tým sme ukázali, že $k \geq m$. Podľa (5) máme

$$k - 1 \leq \frac{1-\frac{1}{m}}{1-x+[x]} < k. \tag{7}$$

Podľa (7) a (3) platí

$$(k-1) \cdot (1 - x + [x]) \leq 1 - \frac{1}{m} < k \cdot (1 - x + [x]),$$

teda

$$k - 1 + k \cdot [x] < k - 1 + k \cdot [x] + \underbrace{x - [x] - 1 + \frac{1}{m}}_{>0 \text{ podľa } (3)} \leq kx < k - 1 + k \cdot [x] + \frac{1}{m},$$

odkiaľ

$$\underbrace{k-1+k\cdot[x]}_{\in\mathbb{Z}} < kx < k-1+k\cdot[x]+\frac{1}{m},$$

čo má za následok

$$[kx] = k-1+k\cdot[x],$$
$$0 < kx-[kx] < \frac{1}{m}.$$

Tým sme ukázali, že (4) platí, t.j.

$$0 < k\alpha(s-r)-[k\alpha(s-r)] < \frac{1}{m}.$$

Tým sme ukázali, že (2) platí. (Stačí položiť $n = k(s-r)$.)
Teraz použijeme (2) k tomu, aby sme našli $l \in \mathbb{N}$ také, že $c < a_l < d$. Nech teda $n \in \mathbb{N}$ je také, že

$$0 < \alpha n - [\alpha n] < \frac{1}{m}.$$

Položme

$$t = \left[\frac{c}{\alpha n - [\alpha n]}\right] + 1.$$

Zrejme $t \in \mathbb{Z}$, $t \geq 0$. Potom

$$t-1 \leq \frac{c}{\alpha n-[\alpha n]} < t,$$
$$t\alpha n - \alpha n - t\cdot[\alpha n] + [\alpha n] \leq c < t\alpha n - t\cdot[\alpha n],$$
$$c < t\alpha n - t\cdot[\alpha n] \leq c + \underbrace{\alpha n - [\alpha n]}_{<\frac{1}{m}<a} < c + a = c + d - c = d.$$

Teda

$$0 < c < t\alpha n - t\cdot[\alpha n] < d < 1,$$
$$\underbrace{t\cdot[\alpha n]}_{\in\mathbb{Z}} < t\alpha n < t\cdot[\alpha n]+1,$$

preto

$$[t\alpha n] = t\cdot[\alpha n],$$
$$c < t\alpha n - [\alpha t n] < d.$$

Tým sme ukázali, že existuje $l \in \mathbb{N}$ také, že $c < a_l < d$ (stačí položiť $l = tn$).

62. Položme

$$a_n = \log n - [\log n], \quad n \in \mathbb{N}.$$

(Symbol $[x]$ označuje celú časť reálneho čísla x.) Ukážte, že v každom intervale $I \subset \langle 0,1\rangle$ sa nachádzajú členy postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Riešenie. Ukážeme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má podpostupnosť s touto vlastnosťou. Stačí položiť $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$\log 2^k = k \cdot \log 2$$

a tvrdenie vyplýva z úlohy č. 61 (pretože $\log 2$ je iracionálne číslo[3]).

> *63. Položme*
> $$a_n = \sin n, \quad n \in \mathbb{N}.$$
> *Ukážte, že v každom intervale $I \subset \langle -1, 1\rangle$ sa nachádzajú členy postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Riešenie. Nech je daný interval $I \subset \langle -1, 1\rangle$, $I = \langle a, b\rangle$. Nech $\alpha, \beta \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\rangle$ sú také, že $\sin\alpha = -a$, $\sin\beta = -b$. Potom $\langle \frac{\alpha}{8}, \frac{\beta}{8}\rangle \subset \langle 0, 1\rangle$, teda existuje také prirodzené číslo n (ako bolo ukázané vyššie), že platí

$$\frac{\pi}{2} \cdot n - \left[\frac{\pi}{2} \cdot n\right] \in \left(\frac{\alpha}{8}, \frac{\beta}{8}\right).$$

Potom

$$\alpha < 4\pi n - 8 \cdot \left[\frac{\pi}{2} \cdot n\right] < \beta.$$

Pretože funkcia sínus je na intervale $\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\rangle$ klesajúca, platí

$$-a = \sin\alpha > \sin\left(4\pi n - 8 \cdot \left[\frac{\pi}{2} \cdot n\right]\right) > \sin\beta = -b.$$

Potom

$$a < \sin k < b,$$

kde $k = 8 \cdot \left[\frac{\pi}{2} \cdot n\right]$. (Symbolom $[x]$ sme označovali celú časť reálneho čísla x.)

[3]Dokážeme to sporom: ak $\log 2 = \frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbb{N}$, potom $2^p \cdot 5^p = 2^q$, pričom ľavá strana je deliteľná číslom 5, ale pravá strana nie.