

B.1 Lokálne extrémymy.

Začneme štandardnou úlohou z analytickej geometrie:

Príklad B.1. Vypočítajte vzdialenosť dvoch mimobežiek. Predpokladajme, že každá z priamok je definovaná bodom A a smerovým vektorom \mathbf{s} . Napríklad, $A_1 = (-4, 4, -1)$, $\mathbf{s}_1 = (2, -1, -2)$ pre prvú priamku, $A_2 = (-5, 5, 5)$, $\mathbf{s}_2 = (4, -3, -5)$ pre druhú priamku. Ľubovoľné dva body týchto priamok môžu byť zapísané ako body tvaru $A_1 + p\mathbf{s}_1$ a $A_2 + q\mathbf{s}_2$, kde p a q sú reálne parametre. Vzdialenosť medzi bodmi $(-4 + 2p, 4 - p, -1 - 2p)$ a $(-5 + 4q, 5 - 3q, 5 - 5q)$ môže byť vypočítaná ako

$$d(p, q) = \sqrt{(1 + 2p - 4q)^2 + (-1 - p + 3q)^2 + (-6 - 2p + 5q)^2}.$$

Prepíšeme tento výraz do tvaru: $d(p, q) = \sqrt{(3p - 7q + 5)^2 + (q - 2)^2 + 9}$. Ľahko vidieť, že $d(p, q) \geq 3$ pre každé $p, q \in \mathbb{R}$. Teda minimum tohto výrazu je $f(3, 2) = 3$.

Definícia B.2. Nech f je funkcia definovaná na množine $D \subset \mathbb{R}^2$. Nech $(x_0, y_0) \in D$. Hovoríme, že f má v bode (x_0, y_0) *lokálne minimum*, ak existuje okolie bodu (x_0, y_0) také, že pre každé (x, y) z tohto okolia, ležiace v množine D , máme $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$.

Lokálne maximum je definované podobne.

Dfiníciu *ostrého lokálneho minima* dostaneme vyžadovaním ostrej nerovnosti $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ v predošlej definícii, prirodzene s obmedzením $(x, y) \neq (x_0, y_0)$. Ostré lokálne maximum sa definuje podobne.

Veta B.3. *Ak f má lokálny extrém v bode (x_0, y_0) a ak prvé parciálne derivácie tejto funkcie v tomto bode existujú, potom sú rovné nule.*

Dôkaz. Predpokladajme, že f má lokálny extrém v bode (x_0, y_0) . Potom funkcia $f(x_0, \cdot)$ má lokálny extrém v bode y_0 a funkcia $f(\cdot, y_0)$ má lokálny extrém v bode x_0 . Teda príslušné derivácie týchto funkcií sú rovné nule.

B.4. Uvažujme $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Predpokladajme, že $a \neq 0$. Potom doplnením na štvorec dostávame

$$f(x, y) = a \left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{1}{a} (ac - b^2) y^2.$$

Ak $a > 0$, $ac - b^2 > 0$, potom $f(x, y)$ je súčtom dvoch nezáporných výrazov. Teda pre každé $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ máme $f(x, y) \geq 0$, pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $(x, y) = (0, 0)$. To ukazuje, že funkcia f má ostré lokálne minimum v bode $(0, 0)$. Podobne v prípade $a < 0$, $ac - b^2 > 0$ funkcia f má ostré lokálne maximum v bode $(0, 0)$.

Teraz predpokladajme, že $a \neq 0$, $ac - b^2 < 0$. Potom $f(x, y)$ je súčtom dvoch výrazov s opačnými znamienkami. Pre vhodný výber čísel x a y sa môže stať, že jeden z nich sa rovná nule a druhý nie. Napríklad

$$f(x, 0) = ax^2, \quad f\left(-\frac{b}{a}y, y\right) = \frac{1}{a} (ac - b^2) y^2.$$

Zrejme v každom okolí bodu $(0, 0)$ ležia body $(x, 0)$ a body $(-\frac{b}{a}y, y)$, pričom hodnoty funkcie f v týchto bodoch sú nenulové a majú opačné znamienka (napríklad pre $x = y = \frac{1}{n}$). To ukazuje, že f nemá extrém v bode $(0, 0)$.

Nakoniec, nech $ac - b^2 < 0$ a $a = 0$. Potom $b \neq 0$ a

$$f\left(\frac{1-c}{2b}x, x\right) = x^2, \quad f\left(\frac{1+c}{2b}x, -x\right) = -x^2.$$

Teda funkcia f nemá extrém v bode $(0, 0)$.

Tým sme ukázali, že:

1. Ak $ac - b^2 > 0$ a $a > 0$, potom f má ostré lokálne minimum v $(0, 0)$.
2. Ak $ac - b^2 > 0$ a $a < 0$, potom f má ostré lokálne maximum v $(0, 0)$.
3. Ak $ac - b^2 < 0$, potom f nemá extrém v bode $(0, 0)$.

Poznamenajme, že existuje vzťah medzi koeficientami a, b, c a druhými parciálnymi deriváciami tejto funkcie:

$$f_{11}(0, 0) = 2a, \quad f_{12}(0, 0) = 2b, \quad f_{22}(0, 0) = 2c.$$

Na základe toho môžeme očakávať, že bude platiť nasledujúce tvrdenie.

Veta B.5. *nech f má spojité parciálne derivácie druhého rádu na otvorenej množine D . nech $(x_0, y_0) \in D$ je stacionárny bod funkcie f (t.j. bod, v ktorom parciálne derivácie sú rovné nule). Položme*

$$a = f_{11}(x_0, y_0), \quad b = f_{12}(x_0, y_0), \quad c = f_{22}(x_0, y_0).$$

- (1) Ak $ac - b^2 > 0$ a $a > 0$, potom f má ostré lokálne minimum v (x_0, y_0) .
 (2) Ak $ac - b^2 > 0$ a $a < 0$, potom f má ostré lokálne maximum v (x_0, y_0) .
 (3) Ak $ac - b^2 < 0$, potom f nemá extrém v bode (x_0, y_0) .

Dôkaz. (1) Zo spojitosti druhých parciálnych derivácií funkcie f v bode (x_0, y_0) dostávame, že existuje $\delta > 0$ také, že $f_{11} > 0$ a $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$ pre každé $(x, y) \in B((x_0, y_0), \delta)$. Potom pre druhý diferenciál funkcie f , ktorý je definovaný takto:

$$df^2(x, y, dx, dy) = f_{11}dx^2 + 2f_{12}dxdy + f_{22}dy^2,$$

pre každé $(x, y) \in B((x_0, y_0), \delta)$ a pre každé $(dx, dy) \neq (0, 0)$, máme

$$df^2(x, y, dx, dy) > 0.$$

Skutočne,

$$df^2(x, y, dx, dy) = f_{11} \left(dx + \frac{f_{12}}{f_{11}} dy \right)^2 + \frac{1}{f_{11}} (f_{11}f_{22} - f_{12}^2) dy^2$$

je súčtom dvoch kladných výrazov.

Nech $(x_1, y_1) \in B((x_0, y_0), \delta)$, $(x_1, y_1) \neq (x_0, y_0)$. Ukážeme, že $f(x_1, y_1) > f(x_0, y_0)$. Položme $g(t) = f(x(t), y(t))$, kde $x(t) = x_0 + tdx$, $y(t) = y_0 + tdy$, $dx = x_1 - x_0$, $dy = y_1 - y_0$. Okrem toho, $(x(t), y(t)) \in B((x_0, y_0), \delta)$ práve vtedy, keď $|t| < \delta / \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Teda $g'(t) = f_1(x(t), y(t))dx + f_2(x(t), y(t))dy$. Pretože (x_0, y_0) je stacionárny bod funkcie f , máme $g'(0) = 0$. Ďalej

$$\begin{aligned}g''(t) &= f_{11}(x(t), y(t))u_1^2 + 2f_{12}(x(t), y(t))u_1u_2 + f_{22}(x(t), y(t))u_2^2 = \\ &= df^2(x(t), y(t), dx, dy) > 0.\end{aligned}$$

Pretože $\delta/\sqrt{dx^2 + dy^2} > 1$, podľa vety 7.43 dostávame

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(t_1),$$

kde $0 \leq t_1 \leq 1$. Pretože $g'(0) = 0$ a $g''(t_1) > 0$, máme $f(x_1, y_1) = g(1) > g(0) = f(x_0, y_0)$.

Prípád (2) je podobný.

Nakoniec dokážeme prípad (3). Nájdeme dva jednotkové vektory \mathbf{u} and \mathbf{v} také, že derivácie $g''_{\mathbf{u}}(0)$ a $g''_{\mathbf{v}}(0)$ majú opačné znamienka a sú nenulové, kde $g_{\mathbf{w}}(t) = f(x_0 + tw_1, y_0 + tw_2)$ a $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ je jednotkový vektor.

Predpokladajme, že $a = c = 0$. Zrejme $b \neq 0$. Položme $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ a $\mathbf{v} = (-u_1, u_2)$, kde $u_1 = u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Potom $g''_{\mathbf{u}}(0) = b$ a $g''_{\mathbf{v}}(0) = -b$ majú požadované vlastnosti.

Predpokladáme, že $a \neq 0$. (prípád $c \neq 0$ je podobný.) Položme $\mathbf{u} = (1, 0)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, kde $v_1 = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $v_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Potom $g''_{\mathbf{u}}(0) = a$ a $g''_{\mathbf{v}}(0) = (ac - b^2)\frac{a}{a^2+b^2}$ majú požadované vlastnosti.

Štvorcová matica $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ sa volá *Hessova matica*¹. Jej determinant je rovný $ac - b^2$.

Príklad B.6. Nájdite lokálne extrémny funkcie

$$z = \frac{ax + by + c}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}.$$

Ak $a = b = c = 0$, funkcia z je konštantná, teda nemá ostré lokálne extrémny. Predpokladajme, že $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Potom

$$z_1 = \frac{a(1 + x^2 + y^2) - x(ax + by + c)}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad z_2 = \frac{b(1 + x^2 + y^2) - y(ax + by + c)}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Stacionárne body sú riešenia sústavy dvoch rovníc

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0,$$

¹Otto Ludwig Hesse (1811–1874)

čo dáva

$$a(1 + x^2 + y^2) = x(ax + by + c),$$

$$b(1 + x^2 + y^2) = y(ax + by + c).$$

Teda $ay(1 + x^2 + y^2) = bx(1 + x^2 + y^2)$, t.j. $ay = bx$. Po dosadení do predošlých rovníc dostávame

$$cx = a, \quad cy = b.$$

Ak $c = 0$, potom funkcia z nemá stacionárne body. Ak $c \neq 0$, potom funkcia z má stacionárny bod $A = (a/c, b/c)$.

Predpokladajme, že $c \neq 0$. Potom

$$\begin{vmatrix} f_{11}(A) & f_{12}(A) \\ f_{12}(A) & f_{22}(A) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{b^2+c^2}{c\left(1+\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}\right)^{3/2}} & \frac{ab}{c\left(1+\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}\right)^{3/2}} \\ \frac{ab}{c\left(1+\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}\right)^{3/2}} & -\frac{a^2+c^2}{c\left(1+\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}\right)^{3/2}} \end{vmatrix} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\left(1 + \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}\right)^{3/2}} > 0.$$

Zrejme znamienko druhej parciálnej derivácie

$$f_{11}(A) = -\frac{b^2 + c^2}{c\left(1 + \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

je určené znamienkom parametra c . Ak $c > 0$, funkcia z má ostré lokálne maximum v bode A . Ak $c < 0$, funkcia z má ostré lokálne minimum v bode A .

Úlohy Nájdite lokálne extrémny nasledujúcich funkcií:

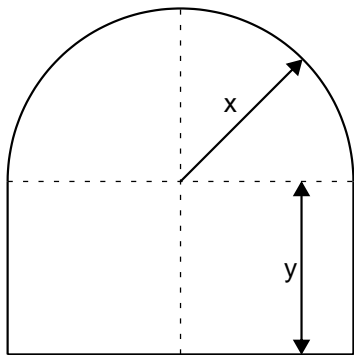
- $z = 2x^3 - 3xy + 2y^3 + 1$
- $z = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$
- $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$
- $z = (y - x^2)(y - 3x^2)$
- $z = (x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2}$
- $z = (1 + e^y) \cos x - ye^y$
- $z = x + y + 4 \sin x \sin y$
- $z = 81 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) - (x^2 + xy + y^2)$
- $z = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$
- $z = (x^2 - 1)e^{y^2} - 2x^2$

B.2 Viazané extrémny.

Príklad B.7. Vypočítajte rozmery okenného profilu podľa obrázku, ktorý je vytvorený z obdĺžnika a polkruhu takým spôsobom, že pre daný obvod bude mať najväčší možný plošný obsah.

Chceme maximalizovať plošný obsah $A = 2xy + \frac{\pi}{2}x^2$ tak, aby obvod $P = 2x + 2y + \pi x$ bol konštantný. Po dosadení do A z rovnosti $2y = P - 2x - \pi x$ máme

$$A = Px - 2x^2 - \pi x^2 + \frac{\pi}{2}x^2.$$



Doplnením na štvorec dostávame

$$A = \frac{P^2}{2(4 + \pi)} - \frac{4 + \pi}{2} \left(x - \frac{P}{4 + \pi} \right)^2.$$

Teda A nadobúda absolútne maximum

$$A = \frac{P^2}{2(4 + \pi)} \text{ v bode } x = \frac{P}{4 + \pi}.$$

Definícia B.8. Nech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, kde $D \subset \mathbb{R}^2$. Nech $\varphi(x, y) = 0$ je podmienka väzby. Hovoríme, že f má v bode $(x_0, y_0) \in D$ *viazané maximum*, ak $\varphi(x_0, y_0) = 0$ a ak $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ pre všetky $(x, y) \in D$ spĺňajúce podmienku $\varphi(x, y) = 0$. Ak posledná nerovnosť je ostrá pre $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, hovoríme, že toto maximum je *ostré viazané maximum*.

Definícia viazaného minima je podobná.

Predpokladajme, že rovnica $\varphi(x, y) = 0$ sa dá riešiť pre neznámu y ako funkciu premennej x , t.j. môžeme považovať túto úrovňovú krivku za graf funkcie $y = \psi(x)$. Dosadením tejto funkcie do $f(x, y)$ dostávame funkciu jednej premennej $f(x, \psi(x))$ a potom hľadáme jej extrém.

Príklad B.9. Nájdite extrém funkcie $z = xy^2$ vzhľadom na podmienku väzby $x^2 + y^2 = 9$.

Z podmienky väzby máme $y^2 = 9 - x^2$. Po dosadení do $z = xy^2$ za y^2 , dostávame $z = 9x - x^3$. Pretože $z' = 9 - 3x^2$, $z'' = -6x$, funkcia $z = 9x - x^3$ nadobúda lokálne maximum v bode $x = \sqrt{3}$ a lokálne minimum v bode $x = -\sqrt{3}$. To znamená, že funkcia $z = xy^2$, vzhľadom na podmienku väzby $x^2 + y^2 = 9$, nadobúda lokálne maximá v bodoch $A = (\sqrt{3}, \sqrt{6})$, $B = (\sqrt{3}, -\sqrt{6})$ a lokálne minimá v bodoch $C = (-\sqrt{3}, \sqrt{6})$, $D = (-\sqrt{3}, -\sqrt{6})$.

Pretože $y^2 \geq 0$ pre všetky reálne čísla y , z podmienky väzby dostávame $y^2 = 9 - x^2 \geq 0$, čo dáva $-3 \leq x \leq 3$. Pretože pre každé x , $-3 < x < 0$, máme $z = 9x - x^3 < 0$, funkcia $z = 9x - x^3$ nadobúda lokálne $z = 0$ v bode $x = -3$. Pretože

pre každé x , $0 < x < 3$, máme $z = 9x - x^3 > 0$, funkcia $z = 9x - x^3$ nadobúda lokálne minimum v bode $x = 3$. To znamená, že funkcia $z = xy^2$, vzhľadom na podmienku väzby $x^2 + y^2 = 9$, nadobúda lokálne maximum v bode $E = (-3, 0)$ a lokálne minimum v bode $F = (3, 0)$.

B.2.1 Lagrangeove multiplikátory.

Uvažujme úrovňové krivky funkcie f a krivku C určenú rovnicou $\varphi(x, y) = 0$. Hľadanie maxím funkcie f na množine všetkých riešení rovnice $\varphi(x, y) = 0$, t.j. na krivke C , je ekvivalentné s hľadaním úrovňovej krivky s najvyššou hladinou, ktorá pretína krivku C .

Veta B.10. *Nech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, kde $D \subset \mathbb{R}^2$ je otvorená množina. Nech (x_0, y_0) je bod krivky C určenej rovnicou $\varphi(x, y) = 0$, ktorá leží v množine D . Predpokladajme, že funkcia f zúžená na množinu C má lokálny extrém v bode (x_0, y_0) . Nech f a φ majú spojité parciálne derivácie v nejakom okolí bodu (x_0, y_0) . Predpokladajme, že (x_0, y_0) nie je krajný bod krivky C . Nech $\nabla\varphi(x_0, y_0) \neq 0$. Potom existuje $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ také, že (x_0, y_0, λ_0) je stacionárny bod Lagrangeovej funkcie $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$.*

Dôkaz. Predpokladajme, že $\varphi_1(x_0, y_0) \neq 0$. Podľa vety o implicitnej funkcii existuje otvorené okolie I bodu x_0 a spojite diferencovateľná funkcia $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ taká, že $\psi(x_0) = y_0$ a $\varphi(x, \psi(x)) = 0$ pre každé $x \in I$. Ďalej, podľa tej istej vety, pre každé $x \in I$ máme

$$\psi'(x) = -\frac{\varphi_1(x, \psi(x))}{\varphi_2(x, \psi(x))}.$$

Potom podľa predpokladu funkcia

$$g(x) = f(x, \psi(x))$$

má lokálny extrém v bode x_0 . Odtiaľ vyplýva, že jej its derivácia v bode x_0 je rovná nule, t.j.

$$g'(x_0) = f_1(x_0, \psi(x_0)) + f_2(x_0, \psi(x_0))\psi'(x_0) = 0.$$

Po dosadení $\psi'(x_0)$ dostávame

$$f_1(x_0, \psi(x_0)) - f_2(x_0, \psi(x_0)) \frac{\varphi_1(x_0, \psi(x_0))}{\varphi_2(x_0, \psi(x_0))} = 0,$$

t.j.

$$f_1(x_0, y_0) - f_2(x_0, y_0) \frac{\varphi_1(x_0, y_0)}{\varphi_2(x_0, y_0)} = 0.$$

Položme

$$\lambda_0 = - \frac{f_2(x_0, y_0)}{\varphi_2(x_0, y_0)}.$$

Po dosadení do predošlej nerovnosti dostávame

$$f_1(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi_1(x_0, y_0) = 0$$

a, po malej úprave, z definície čísla λ_0 máme

$$f_1(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi_2(x_0, y_0) = 0.$$

Tým je dôkaz ukončený.

B.2.2 Existencia viazaných extrémov.

Teraz sa budeme zaoberať otázkou existencie a typu viazaných extrémov. Ak v stacionárnom bode x_0 platí $g''(x_0) < 0$, potom funkcia g má v bode x_0 lokálne maximum.

Pre každé $x \in I$ máme $\varphi(x, \psi(x)) = 0$. Teda funkcia jednej premennej

$$h(x) = \varphi(x, \psi(x)), \quad x \in I,$$

sa rovná identicky nule. Teda jej derivácia sa rovná nule, t.j.

$$h'(x) = \varphi_1(x, \psi(x)) + \varphi_2(x, \psi(x))\psi'(x) = 0.$$

Pre funkciu

$$g(x) = f(x, \psi(x)), \quad x \in I,$$

máme

$$g'(x) = f_1(x, \psi(x)) + f_2(x, \psi(x))\psi'(x).$$

Pokúsime sa vyjadriť deriváciu $g'(x)$ pomocou parciálnych derivácií Lagrangeovej funkcie. Počítajme

$$L_1(x, y, \lambda_0) = f_1(x, y) + \lambda_0 \varphi_1(x, y), \quad L_2(x, y, \lambda_0) = f_2(x, y) + \lambda_0 \varphi_2(x, y).$$

Odtiaľ

$$L_1(x, \psi(x), \lambda_0) = f_1(x, \psi(x)) + \lambda_0 \varphi_1(x, \psi(x)),$$

$$L_2(x, \psi(x), \lambda_0) = f_2(x, \psi(x)) + \lambda_0 \varphi_2(x, \psi(x)).$$

Teda

$$\begin{aligned} & L_1(x, \psi(x), \lambda_0) + L_2(x, \psi(x), \lambda_0)\psi'(x) = \\ & = f_1(x, \psi(x)) + \lambda_0 \varphi_1(x, \psi(x)) + (f_2(x, \psi(x)) + \lambda_0 \varphi_2(x, \psi(x))) \psi'(x) = \\ & = \underbrace{f_1(x, \psi(x)) + f_2(x, \psi(x))\psi'(x)}_{=g'(x)} + \lambda_0 \underbrace{(\varphi_1(x, \psi(x)) + \varphi_2(x, \psi(x))\psi'(x))}_{=0}. \end{aligned}$$

To ukazuje, že $g'(x) = L_1(x, \psi(x), \lambda_0) + L_2(x, \psi(x), \lambda_0)\psi'(x)$.

Potom pre druhú deriváciu funkcie g máme

$$\begin{aligned} g''(x) &= L_{11}(x, \psi(x), \lambda_0) + L_{12}(x, \psi(x), \lambda_0)\psi'(x) + \\ &+ (L_{12}(x, \psi(x), \lambda_0) + L_{22}(x, \psi(x), \lambda_0)\psi'(x)) \psi'(x) + L_2(x, \psi(x), \lambda_0)\psi''(x), \end{aligned}$$

teda

$$\begin{aligned} g''(x_0) &= L_{11}(x_0, y_0, \lambda_0) + 2L_{12}(x_0, y_0, \lambda_0)\psi'(x_0) + \\ &+ L_{22}(x_0, y_0, \lambda_0)(\psi'(x_0))^2 + L_2(x_0, y_0, \lambda_0)\psi''(x_0). \end{aligned}$$

Pretože (x_0, y_0, λ_0) je stacionárny bod Lagrangeovej funkcie, dostávame

$$L_2(x_0, y_0, \lambda_0) = 0.$$

Teda

$$g''(x_0) = L_{11}(x_0, y_0, \lambda_0) + 2L_{12}(x_0, y_0, \lambda_0)\psi'(x_0) + L_{22}(x_0, y_0, \lambda_0)\psi'^2(x_0).$$

Pretože

$$\psi'(x_0) = -\frac{\varphi_1(x_0, y_0)}{\varphi_2(x_0, y_0)},$$

po malých úpravách dostávame

$$g''(x_0) = \frac{1}{\varphi_2^2(x_0, y_0)} \left[L_{11}(x_0, y_0, \lambda_0)\varphi_2^2(x_0, y_0) - \right. \\ \left. - 2L_{12}(x_0, y_0, \lambda_0)\varphi_1(x_0, y_0)\varphi_2(x_0, y_0) + L_{22}(x_0, y_0, \lambda_0)\varphi_1^2(x_0, y_0) \right].$$

Ak v stacionárnom bode x_0 máme $g''(x_0) < 0$, potom funkcia g má v bode x_0 lokálne maximum. Podľa predošlého vzorca to platí, ak v bode (x_0, y_0, λ_0) máme

$$L_{11}\varphi_2^2 - 2L_{12}\varphi_1\varphi_2 + L_{22}\varphi_1^2 < 0.$$

Táto podmienka môže byť preformulovaná takto:

$$\begin{vmatrix} 0 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1 & L_{11} & L_{12} \\ \varphi_2 & L_{12} & L_{22} \end{vmatrix} > 0 \text{ v bode } (x_0, y_0, \lambda_0).$$

B.2.3 Rozšírené Hessove matice.

Vyššie uvedená diskusia môže byť zhrnutá do nasledujúcej vety. Matica

$$\begin{pmatrix} 0 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1 & L_{11} & L_{12} \\ \varphi_2 & L_{12} & L_{22} \end{pmatrix}$$

sa volá *rozšírená Hessova matica*.

Veta B.11. *Nech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, kde $D \subset \mathbb{R}^2$ je otvorená množina. Nech (x_0, y_0) je bod krivky C určenej rovnicou $\varphi(x, y) = 0$, ktorá leží v množine D . Predpokladajme, že funkcia f zúžená na množinu C má lokálny extrém v bode (x_0, y_0) . Nech f a φ majú spojité parciálne derivácie v nejakom okolí bodu (x_0, y_0) . Predpokladajme, že (x_0, y_0) nie je krajný bod krivky C . Nech $\nabla\varphi(x_0, y_0) \neq 0$. Nech $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ je také, že (x_0, y_0, λ_0) je stacionárny bod Lagrangeovej funkcie $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$. Položme*

$$H^* = \begin{vmatrix} 0 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1 & L_{11} & L_{12} \\ \varphi_2 & L_{12} & L_{22} \end{vmatrix} \text{ v bode } (x_0, y_0, \lambda_0).$$

- (i) Ak $H^* > 0$, potom v bode (x_0, y_0) je lokálne maximum funkcie f na C .
- (ii) Ak $H^* < 0$, potom v bode (x_0, y_0) je lokálne minimum funkcie f na C .

Úlohy nájdite viazané extrémny funkcií na daných krivkách:

- $z = 7x^2 + 4xy + 3y^2$, ak $x^2 + y^2 = 1$
- $z = \frac{x-y-4}{\sqrt{2}}$, ak $x^2 + y^2 = 1$
- $z = xy$, ak $x^2 + y^2 = 1$
- $z = x^2 + 12xy + 2y^2$, ak $4x^2 + y^2 = 25$
- $z = \ln(xy)$, ak $x^3 + xy + y^3 = 0$
- $z = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, ak $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{8}$

B.2.4 Absolútne extrémny.

Príklad B.12. Ukážte, že $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq \frac{1}{8}$, kde α, β, γ sú uhly ľubovoľného trojuholníka.

Skutočne, pretože $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, máme

$$\begin{aligned}\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma &= \cos \alpha \cos \beta \cos(\pi - \alpha - \beta) = -\cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \beta) = \\ &= -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2}[\cos^2(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)] =\end{aligned}$$

a doplnením na štvorec dostávame

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{2}[(\cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta))^2 - \frac{1}{4} \cos^2(\alpha - \beta)] = \\ &= \frac{1}{8} \cos^2(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta))^2 \leq \frac{1}{8} \cos^2(\alpha - \beta) \leq \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Pretože spojitá funkcia definovaná na kompaktnej množine nadobúda svoje absolútne maximum (Corollary 11.47), predošlý problém môžeme preformulovať takto:

Nájdite absolútne maximum funkcie $z = -\cos x \cos y \cos(x + y)$ vzhľadom na podmienky väzby $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq x + y \leq \pi$.

Definícia B.13. Nech f je funkcia definovaná na množine $D \subset \mathbb{R}^2$. Nech $(x_0, y_0) \in D$. Hovoríme, že f má *absolútne minimum* na množine D v bode (x_0, y_0) , ak $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ pre každé $(x, y) \in D$.

Podobne definujeme absolútne maximum.

Veta B.14. Nech (x_0, y_0) je vnútorný bod množiny D . Ak f má absolútny extrém v bode (x_0, y_0) , potom buď $f_1(x_0, y_0) = 0$ a $f_2(x_0, y_0) = 0$, alebo aspoň jedna z týchto derivácií neexistuje.

Absolútne extrémny môžu byť nadobúdané v stacionárnych bodoch, bodoch hranice definičnej oblasti, alebo v bodoch, v ktorých parciálne derivácie nie sú definované.

Úlohy

- Nájdite extrémny funkcie $z = 11 - 8x^2y + 2x^3y + 2x^2y^2$ vzhľadom na podmienky väzby $x \geq 0$, $y \geq 0$ a $x + y \leq 6$.
- Nájdite extrémny funkcie $z = x^2 + y^2 - x - y + 1$ vzhľadom na podmienky väzby $x^2 + y^2 \leq 1$.
- Nájdite extrémny funkcie $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y + 50$ vzhľadom na podmienky väzby $x^2 + y^2 \leq 225$.