

Merateľné množiny.

Nech

$$K_0 = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Dvojrozmernou mierou štvorca K_0 rozumieme číslo 1. $\mu(K_0) = 1$. Rozdelíme interval $\langle 0, 1 \rangle$ na 10^k rovnakých častí. Dostaneme 10^{2k} rovnakých štvorcov. Nech M je ľubovoľná neprázdna množina bodov v \mathbb{R}^2 . V \mathbb{R}^2 si zvolíme súradnicovú sústavu a zostrojíme sústavu priamok

$$x = \frac{m}{10^k}, \quad y = \frac{m}{10^k}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

ktoré nám rozdelia rovinu na nekonečnú množinu elementárnych štvorcov (štvorcová sieť rádu k – označíme ju S_k). \underline{M}_k – zjednotenie tých štvorcov siete S_k , ktoré sú celé aj s hranicou obsiahnuté v množine M . \overline{M}_k – zjednotenie tých štvorcov siete S_k , ktoré obsahujú aspoň jeden bod množiny M . Platí

$$\underline{M}_k \subset M \subset \overline{M}_k.$$

\underline{M}_k je polygón k -teho rádu vpísaný do množiny M . \overline{M}_k je polygón k -teho rádu opísaný množine M . Ak zhusťujeme sieť (zmenšujeme elementárne štvorce), dostávame postupnosť polygónov

$$\underline{M}_0 \subset \underline{M}_1 \subset \underline{M}_2 \subset \dots \subset \underline{M}_k \subset \dots \subset M \subset \dots \subset \overline{M}_k \subset \dots \overline{M}_2 \subset \overline{M}_1 \subset \overline{M}_0. \quad -1-$$

Teda

$$\begin{aligned} \mu(\underline{M}_0) \leq \mu(\underline{M}_1) \leq \mu(\underline{M}_2) \leq \dots \leq \mu(\underline{M}_k) \leq \dots \\ \leq \mu(M) \leq \\ \dots \leq \mu(\overline{M}_k) \leq \dots \mu(\overline{M}_2) \leq \mu(\overline{M}_1) \leq \mu(\overline{M}_0). \end{aligned}$$

Postupnosť $\{\mu(\underline{M}_k)\}_{k=0}^{\infty}$ je neklesajúca a zhora ohraničená. Podobne, postupnosť $\{\mu(\overline{M}_k)\}_{k=0}^{\infty}$ je nerastúca a zdola ohraničená. Teda tieto postupnosti sú konvergentné a existujú limity

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\underline{M}_k), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\overline{M}_k).$$

Číslo $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\underline{M}_k)$ nazývame vnútornou mierou množiny M a označujeme $\underline{\mu}(M)$.

Číslo $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\overline{M}_k)$ nazývame vonkajšou mierou množiny M a označujeme $\overline{\mu}(M)$.

$$\underline{\mu}(M) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\underline{M}_k), \quad \overline{\mu}(M) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\overline{M}_k).$$

Každá ohraničená množina $M \subset \mathbb{R}^2$ má vnútornú i vonkajšiu mieru.

$$0 \leq \underline{\mu}(M) \leq \overline{\mu}(M).$$

Ak $\underline{\mu}(M) = \overline{\mu}(M)$, množina $M \subset \mathbb{R}^2$ sa nazýva merateľná v zmysle Jordana (J-merateľná). Vtedy

$$\mu(M) = \underline{\mu}(M) = \overline{\mu}(M).$$

Integrálne súčty.

Nech G je merateľná uzavretá oblasť v \mathbb{R}^2 . Delením oblasti G rozumieme systém D konečného počtu podmnožín $\Delta G_1, \Delta G_2, \dots, \Delta G_r$ oblasti G , ak

1. všetky podmnožiny ΔG_i sú merateľné a majú kladné miery;
2. $\bigcup_{i=1}^r \Delta G_i = G$;
3. dve rôzne podmnožiny $\Delta G_i, \Delta G_j$ nemajú spoločné vnútorné body (spoločné body môžu byť iba hraničné).

Z definície delenia merateľnej oblasti vyplýva, že

$$\mu(G) = \sum_{i=1}^r \mu(\Delta G_i).$$

Nech $D = \{\Delta G_1, \Delta G_2, \dots, \Delta G_r\}$ je delenie oblasti G . Číslo

$$\nu(D) = \max\{p(\Delta G_1), \dots, p(\Delta G_r)\}$$

nazveme normou delenia D . Pritom

$$p(M) = \sup_{A, B \in M} d(A, B)$$

je priemer množiny M , kde $d(A, B)$ je vzdialenosť bodov $A = [a_1, a_2]$ a $B = [b_1, b_2]$ v rovine, t.j. $d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$.

Hovoríme, že postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ oblasti D je normálna, ak postupnosť noriem $\{\nu(D_k)\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k nule (t.j. $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu(D_k) = 0$).

Nech $f(x, y)$ je funkcia definovaná na merateľnej uzavretej oblasti G .
Nech $D = \{\Delta G_1, \dots, \Delta G_r\}$ je ľubovoľné delenie oblasti G . Číslo

$$S_f(D) = \sum_{i=1}^r f(x_i, y_i) \cdot \mu(\Delta G_i)$$

nazývame integrálnym súčtom funkcie f pre delenie D a voľbu bodov $[x_i; y_i] \in \Delta G_i$.

Nech

$$m_i = \inf\{f(x, y); [x; y] \in \Delta G_i\},$$
$$M_i = \sup\{f(x, y); [x; y] \in \Delta G_i\}.$$

V oblasti ΔG_i platí

$$m_i \leq f(x_i, y_i) \leq M_i.$$

Číslo

$$\underline{S}_f(D) = \sum_{i=1}^r m_i \cdot \mu(\Delta G_i)$$

nazývame dolný integrálny súčet. Číslo

$$\bar{S}_f(D) = \sum_{i=1}^r M_i \cdot \mu(\Delta G_i)$$

nazývame horný integrálny súčet.

Každému deleniu D oblasti G prislúcha práve jeden horný a jeden dolný integrálny súčet. Platí

$$\underline{S}_f(D) \leq S_f(D) \leq \bar{S}_f(D).$$

Nech $f(x, y)$ je funkcia definovaná na merateľnej uzavretej množine $G \subset \mathbb{R}^2$. Nech $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je ľubovoľná normálna postupnosť delení oblasti G . Každú postupnosť integrálnych súčtov funkcie f prislúchajúcu k tejto normálnej postupnosti delení, nazveme prípustnou postupnosťou integrálnych súčtov.

Ak pre každú prípustnú postupnosť $\{S_f(D_k)\}_{k=1}^{\infty}$ platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_f(D_k) = I,$$

hovoríme, že funkcia f je integrovateľná na oblasti G a číslo

$$I = \iint_G f(x, y) \, dx dy$$

nazývame Riemannovým integrálom funkcie f na oblasti G .

Pre ľubovoľnú normálnu postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ sa dolné a horné integrálne súčty približujú k $S_f(D_k)$. V limite platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{S}_f(D_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{S_f(D_k)}_{= \iint_G f(x,y) dx dy} = \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{S}_f(D_k).$$

Základné vety dvojného integrálu.

Veta 1. Ak sú funkcie $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, \dots , $f_k(x, y)$ integrovateľné na merateľnej oblasti G , potom aj funkcia

$$f(x, y) = c_1 \cdot f_1(x, y) + c_2 \cdot f_2(x, y) + \dots + c_k \cdot f_k(x, y)$$

(c_1, c_2, \dots, c_k sú ľubovoľné konštanty) je integrovateľná na G a platí

$$\begin{aligned} \iint_G (c_1 \cdot f_1(x, y) + \dots + c_k \cdot f_k(x, y)) dx dy &= \\ &= c_1 \cdot \iint_G f_1(x, y) dx dy + \dots + c_k \cdot \iint_G f_k(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Veta 2. Nech funkcia $f(x, y)$ je integrovateľná na merateľnej oblasti G a nech

$$G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$$

je rozklad oblasti G . Potom platí

$$\iint_G f(x, y) \, dx dy = \iint_{G_1} f(x, y) \, dx dy + \dots + \iint_{G_n} f(x, y) \, dx dy.$$

Veta 3. Ak je funkcia $f(x, y)$ integrovateľná na merateľnej oblasti G a $f(x, y) \geq 0$ pre všetky $[x, y] \in G$, potom platí

$$\iint_G f(x, y) \, dx dy \geq 0.$$

Veta 4. Ak sú funkcie $f(x, y)$ a $g(x, y)$ integrovateľné na merateľnej oblasti G a $f(x, y) \leq g(x, y)$ pre všetky $[x, y] \in G$, potom platí

$$\iint_G f(x, y) \, dx dy \leq \iint_G g(x, y) \, dx dy.$$

Veta 5. *Nech G je merateľná oblasť. Ak $f(x, y) = 1$ pre všetky $[x, y] \in G$, potom platí*

$$\iint_G f(x, y) \, dx dy = \iint_G dx dy = \mu(G).$$

Veta 6. (Veta o strednej hodnote) *Ak funkcia $f(x, y)$ je spojitá na merateľnej oblasti G , potom existuje aspoň jeden bod $[\xi, \eta] \in G$ taký, že platí*

$$\iint_G f(x, y) \, dx dy = f(\xi, \eta) \cdot \mu(G).$$

Výpočet dvojných integrálov.

Uvažujme oblasť

$$G = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Táto oblasť je merateľná. Jej plošný obsah (miera) je

$$\mu(G) = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] \, dx.$$

Uvažujme oblasť

$$G = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}.$$

Oblasť G je merateľná. Jej plošný obsah (miera) je

$$\mu(G) = \int_c^d [\psi_2(y) - \psi_1(y)] dy.$$

Ak funkcia $f(x, y)$ je spojitá na merateľnej oblasti, potom dvojný integrál vypočítame pomocou dvoch za sebou nasledujúcich integrovaní funkcií jednej premennej – t.j. dvojnásobným integrálom.

Nech $f(x, y)$ je spojitá na oblasti G . Pre $x \in \langle a, b \rangle$ definujeme na intervale $\langle \varphi_1(x), \varphi_2(x) \rangle$ funkciu

$$h(y) = f(x, y), \quad y \in \langle \varphi_1(x), \varphi_2(x) \rangle.$$

Funkcia $h(y)$ je spojitá na $\langle \varphi_1(x), \varphi_2(x) \rangle$ a teda je integrovateľná. Preto existuje integrál

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \underbrace{f(x, y)}_{h(y)} dy, \quad x \in \langle a, b \rangle.$$

Hodnota integrálu $F(x)$ závisí od parametra x . Dá sa ukázať, že funkcia $F(x)$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$, to znamená, že je integrovateľná na $\langle a, b \rangle$ a existuje integrál

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

(Dvojnásobný integrál funkcie $f(x, y)$ na oblasti G .)

Podobne aj pre elementárnu oblasť druhého typu existuje integrál

$$H(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx, \quad y \in \langle c, d \rangle.$$

Funkcia $H(y)$ je spojitá na intervale $\langle c, d \rangle$, to znamená, že existuje integrál

$$\int_c^d H(y) dy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$

Veta 7. *Nech funkcia $f(x, y)$ je spojitá na oblasti*

$$G = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

kde φ_1, φ_2 sú spojité funkcie na $\langle a, b \rangle$ a $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ pre všetky $x \in \langle a, b \rangle$. Potom platí

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

Veta 8. *Nech funkcia $f(x, y)$ je spojitá na oblasti*

$$G = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

kde ψ_1, ψ_2 sú spojité funkcie na $\langle c, d \rangle$ a $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ pre všetky $y \in \langle c, d \rangle$. Potom platí

$$\iint_G f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx \right] dy.$$

Poznámka. Môžeme sa stretnúť aj so zápisom

$$\begin{aligned} \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy &= \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \right] dx \\ \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx &= \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx \right] dy. \end{aligned}$$

Transformácia dvojného integrálu.

Nech $M^* \subset \mathbb{R}^2$, $M^* \neq \emptyset$. Nech je dané ľubovoľné prosté zobrazenie $\phi : M^* \rightarrow \mathbb{R}^2$, ktoré každému bodu $[u, v] \in M^*$ priraduje práve jeden bod $[x, y] \in \mathbb{R}^2$.

Množina M^* sa nazýva obor zobrazenia. Bod $[x, y] = \phi([u, v])$ je obraz bodu $[u, v]$ a M je množina obrazov.

Pomocou zobrazenia ϕ môžeme na množine M^* definovať dve funkcie

$$\varphi_1(u, v) = x$$

$$\varphi_2(u, v) = y, \quad [u, v] \in M^*, [x, y] \in M.$$

Zobrazenie ϕ musí byť prosté, aby k nemu existovalo inverzné zobrazenie

$$\phi^{-1} : M \rightarrow M^*,$$

ktoré každý obraz jednoznačne vráti do svojho vzoru.

Zobrazenie ϕ určené funkciami $\varphi_1(u, v) = x$, $\varphi_2(u, v) = y$, sa nazýva regulárne na M^* , ak

1. funkcie φ_1 , φ_2 majú na M^* spojité parciálne derivácie podľa oboch premenných,
2. platí

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi_1(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2(u, v)}{\partial v} \end{array} \right| \neq 0 \quad \text{pre každé } [u, v] \in M^*.$$

Uvedený determinant sa volá Jacobiho funkcionálny determinant (Jakobián) a označujeme ho $J(u, v)$

Veta 9. (Veta o substitúcii) *Nech*

1. $M^* \subset \mathbb{R}^2$ je oblasť a zobrazenie $\phi : M^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ určené funkciami $\varphi_1(u, v) = x$, $\varphi_2(u, v) = y$, je prosté a regulárne na M^* ,
2. $G^* \subset M^*$ je merateľná uzavretá oblasť,
3. funkcia $f(x, y)$ je spojitá na uzavretej oblasti $G = \phi(G^*)$. Potom platí

$$\iint_G f(x, y) \, dx dy = \iint_{G^*} f(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \cdot |J(u, v)| \, dudv.$$

Budeme sa teraz zaoberať polárnou súradnicovou sústavou. Každý bod roviny sa dá zapísať v tvare $A = [\varrho, \varphi]$, kde ϱ je dĺžka sprievodiča a φ je uhol medzi sprievodičom a polárnou osou.

Vzťah medzi pravouhlou sústavou a polárnou sústavou súradníc je daný vzťahmi

$$x = \varrho \cdot \cos \varphi$$

$$y = \varrho \cdot \sin \varphi \quad 0 \leq \varrho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Vypočítame Jacobiho determinant pre transformáciu pomocou polárnych súradníc:

$$J(\varrho, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \varrho \cos \varphi \end{vmatrix} = \varrho.$$

Potom podľa Vety 9 platí:

$$\iint_G f(x, y) \, dx dy = \iint_{G^*} f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi) \cdot \varrho \, d\varrho d\varphi.$$

Zovšeobecnené polárne súradnice:

$$x = a \cdot \varrho \cdot \cos \varphi$$

$$y = b \cdot \varrho \cdot \sin \varphi$$

Pre Jakobián platí:

$$J(\varrho, \varphi) = ab\varrho.$$

Geometrické aplikácie dvojného integrálu.

Obsah rovinných útvarov.

Nech G je merateľná a uzavretá rovinná oblasť. Potom pre jej plošný obsah platí:

$$P = \iint_G dx dy.$$

Objem telies.

Nech funkcie $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ sú spojité na G , pričom $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$ pre všetky $[x, y] \in G$. Potom pre objem telesa ohraničeného grafmi funkcií $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, a priamkovou plochou, ktorá v rovine $z = 0$ vytína oblasť G , platí:

$$V = \iint_G [f_2(x, y) - f_1(x, y)] \, dx dy.$$

Obsah zakrivenej plochy.

Nech funkcia $f(x, y)$ je spojitá na uzavretej a merateľnej oblasti G . Pre obsah zakrivenej plochy, ktorá je časťou grafu funkcie $f(x, y)$ nad oblasťou G , platí:

$$S = \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)^2} \, dx dy.$$

Fyzikálne aplikácie dvojných integrálov.

Nech G je uzavretá merateľná oblasť v \mathbb{R}^2 a nech jej hustota (merná hmotnosť) je $h(x, y)$. Hustota $h(x, y)$ udáva hmotnosť pripadajúcu na jednotku obsahu. Hustota je spojitá funkcia na G a $h(x, y) \geq 0$. Ak je oblasť homogénna, hustota $h(x, y) = k$ je konštantná.

Hmotnosť rovinatej oblasti.

$$m = \iint_G h(x, y) \, dx dy.$$

Statické momenty rovinatej oblasti.

(vzhľadom na os x a vzhľadom na os y)

$$S_x = \iint_G h(x, y) \cdot y \, dx dy, \quad S_y = \iint_G h(x, y) \cdot x \, dx dy.$$

Ťažisko rovinatej oblasti.

Pre súradnice ťažiska hmotnej oblasti G platí:

$$T = [x_T, y_T], \quad x_T = \frac{S_y}{m}, \quad y_T = \frac{S_x}{m}.$$

Momenty zotrvačnosti rovinnej oblasti.

$$I_x = \iint_G y^2 \cdot h(x, y) \, dx dy$$

$$I_y = \iint_G x^2 \cdot h(x, y) \, dx dy$$

$$I_z = \iint_G (x^2 + y^2) \cdot h(x, y) \, dx dy$$

TROJNÝ INTEGRÁL

Pojem trojného integrálu.

Všetky pojmy, ktoré sme definovali pre priestor \mathbb{R}^2 , môžeme zovšeobecniť aj pre priestor \mathbb{R}^3 .

Nech $f(x, y, z)$ je funkcia definovaná na merateľnej uzavretej množine $G \subset \mathbb{R}^3$. Nech $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je ľubovoľná normálna postupnosť delení oblasti G . Ak pre každú prípustnú postupnosť integrálnych súčtov $\{S_f(D_k)\}_{k=1}^{\infty}$ platí $\lim_{k \rightarrow \infty} S_f(D_k) = I$, hovoríme, že funkcia $f(x, y, z)$ je integrovateľná na oblasti G a reálne číslo

$$I = \iiint_G f(x, y, z) \, dx dy dz$$

nazývame Riemannovým integrálom funkcie $f(x, y, z)$ na oblasti G .

Vety 1, 2, 3, 4 platia aj pre trojný integrál. Vetu 5 môžeme preformulovať nasledujúcim spôsobom:

Veta 1. *Nech $G \subset \mathbb{R}^3$ je merateľná uzavretá oblasť. Ak $f(x, y, z) = 1$ pre všetky $[x, y, z] \in G$, potom platí (kde $\mu(G)$ je miera oblasti G):*

$$\iiint_G f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_G dx dy dz = \mu(G).$$

Uvažujme oblasť

$$G = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}.$$

Miera (objem) oblasti G je

$$\mu(G) = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(f_2(x, y) - f_1(x, y) \right) dy \right] dx.$$

Uvažujme oblasť

$$G = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : c \leq y \leq d, p_1(y) \leq x \leq p_2(y), q_1(x, y) \leq z \leq q_2(x, y)\}.$$

Miera (objem) oblasti G je

$$\mu(G) = \int_c^d \left[\int_{p_1(y)}^{p_2(y)} \left(q_2(x, y) - q_1(x, y) \right) dx \right] dy.$$

Nasledujúca veta uvádza rovnosť trojného a trojnásobného integrálu.

Veta 2. *Nech funkcia $f(x, y, z)$ je spojitá na merateľnej uzavretej oblasti*

$$G = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\},$$

kde $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ sú spojité na priemete oblasti G do roviny xy a $g_1(x)$, $g_2(x)$ sú spojité na intervale $\langle a, b \rangle$. Potom platí:

$$\iint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx.$$

Podobná veta platí aj pre oblasť

$$G = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : c \leq y \leq d, p_1(y) \leq x \leq p_2(y), q_1(x, y) \leq z \leq q_2(x, y)\}.$$

Potom platí:

$$\iint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d \left[\int_{p_1(y)}^{p_2(y)} \left(\int_{q_1(x, y)}^{q_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx \right] dy.$$

Transformácie trojného integrálu.

Nech $\emptyset \neq \Omega^* \subset \mathbb{R}^3$. Nech je dané ľubovoľné prosté zobrazenie $\phi : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^3$, ktoré každému bodu $[u, v, w] \in \Omega^*$ priraduje práve jeden bod $[x, y, z] \in \mathbb{R}^3$.

Regulárne zobrazenie $\phi : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^3$ môže byť dané rovnicami

$$x = \varphi_1(u, v, w)$$

$$y = \varphi_2(u, v, w)$$

$$z = \varphi_3(u, v, w)$$

Potom Jacobiho funkcionálny determinant $J(u, v, w)$ sa bude rovnať

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1(u, v, w)}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1(u, v, w)}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_1(u, v, w)}{\partial w} \\ \frac{\partial \varphi_2(u, v, w)}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2(u, v, w)}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_2(u, v, w)}{\partial w} \\ \frac{\partial \varphi_3(u, v, w)}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3(u, v, w)}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_3(u, v, w)}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Nasledujúca veta je veta o substitúcii v trojnóm integráli.

Veta 3. *Nech*

1. $\Omega^* \subset \mathbb{R}^3$ je oblasť a zobrazenie $\phi : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^3$ určené funkciami

$$x = \varphi_1(u, v, w)$$

$$y = \varphi_2(u, v, w)$$

$$z = \varphi_3(u, v, w)$$

je prosté a regulárne;

2. $G^* \subset \Omega^*$ je merateľná uzavretá oblasť;

3. funkcia $f(x, y, z)$ je spojitá na uzavretej oblasti $G = \phi(G^*)$.

Potom platí:

$$\begin{aligned} & \iint_G f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \\ & = \iiint_{G^*} f(\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w)) \cdot |J(u, v, w)| \, du \, dv \, dw. \end{aligned}$$

Transformácia do cylindrických súradníc.

Vzťah medzi pravouhlými súradnicami $[x, y, z]$ a cylindrickými súradnicami $[\varrho, \varphi, z]$ ľubovoľného bodu M je daný rovnicami

$$x = \varrho \cdot \cos \varphi$$

$$y = \varrho \cdot \sin \varphi$$

$$z = z$$

kde $0 \leq \varrho < +\infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$.

Jakobián tohto zobrazenia je:

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x(\varrho, \varphi, z)}{\partial \varrho} & \frac{\partial x(\varrho, \varphi, z)}{\partial \varphi} & \frac{\partial x(\varrho, \varphi, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial y(\varrho, \varphi, z)}{\partial \varrho} & \frac{\partial y(\varrho, \varphi, z)}{\partial \varphi} & \frac{\partial y(\varrho, \varphi, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial z(\varrho, \varphi, z)}{\partial \varrho} & \frac{\partial z(\varrho, \varphi, z)}{\partial \varphi} & \frac{\partial z(\varrho, \varphi, z)}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\varrho \cdot \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \varrho \cdot \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \varrho.$$

Ak $G^* \subset \Omega^*$ je merateľná uzavretá oblasť v \mathbb{R}^3 a funkcia $f(x, y, z)$ je spojitá na uzavretej oblasti $G = \phi(G^*)$, potom podľa Vety 3 platí:

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{G^*} f(\varrho \cdot \cos \varphi, \varrho \cdot \sin \varphi, z) \cdot \varrho d\varrho d\varphi dz.$$

Zobrazenie ϕ definované vzťahmi

$$x = a \cdot \varrho \cdot \cos \varphi$$

$$y = b \cdot \varrho \cdot \sin \varphi$$

$$z = c \cdot z,$$

kde a, b, c sú kladné konštanty, sa nazýva zovšeobecnená cylindrická transformácia v priestore \mathbb{R}^3 . Dá sa dokázať, že toto zobrazenie je prosté a regulárne. Pre Jakobián

platí:

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x(\varrho, \varphi, z)}{\partial \varrho} & \frac{\partial x(\varrho, \varphi, z)}{\partial \varphi} & \frac{\partial x(\varrho, \varphi, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial y(\varrho, \varphi, z)}{\partial \varrho} & \frac{\partial y(\varrho, \varphi, z)}{\partial \varphi} & \frac{\partial y(\varrho, \varphi, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial z(\varrho, \varphi, z)}{\partial \varrho} & \frac{\partial z(\varrho, \varphi, z)}{\partial \varphi} & \frac{\partial z(\varrho, \varphi, z)}{\partial z} \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} a \cdot \cos \varphi & -a \cdot \varrho \cdot \sin \varphi & 0 \\ b \cdot \sin \varphi & b \cdot \varrho \cdot \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc\varrho.$$

Transformácia do sférických súradníc.

Vzťah medzi pravouhlými súradnicami $[x, y, z]$ a sférickými súradnicami $[\varrho, \varphi, \vartheta]$ ľubovoľného bodu M je daný rovnicami:

$$x = \varrho \cdot \cos \varphi \cdot \sin \vartheta$$

$$y = \varrho \cdot \sin \varphi \cdot \sin \vartheta$$

$$z = \varrho \cdot \cos \vartheta,$$

kde $0 \leq \varrho < +\infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$.

Jakobián uvažovanej transformácie je:

$$\begin{aligned}
 J(u, v, w) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x(\varrho, \varphi, \vartheta)}{\partial \varrho} & \frac{\partial x(\varrho, \varphi, \vartheta)}{\partial \varphi} & \frac{\partial x(\varrho, \varphi, \vartheta)}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y(\varrho, \varphi, \vartheta)}{\partial \varrho} & \frac{\partial y(\varrho, \varphi, \vartheta)}{\partial \varphi} & \frac{\partial y(\varrho, \varphi, \vartheta)}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z(\varrho, \varphi, \vartheta)}{\partial \varrho} & \frac{\partial z(\varrho, \varphi, \vartheta)}{\partial \varphi} & \frac{\partial z(\varrho, \varphi, \vartheta)}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} \cos \varphi \cdot \sin \vartheta & -\varrho \cdot \sin \varphi \cdot \sin \vartheta & \varrho \cdot \cos \varphi \cdot \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cdot \sin \vartheta & \varrho \cdot \cos \varphi \cdot \sin \vartheta & \varrho \cdot \sin \varphi \cdot \cos \vartheta \\ \cos \vartheta & 0 & -\varrho \cdot \sin \vartheta \end{vmatrix} = -\varrho^2 \cdot \sin \vartheta.
 \end{aligned}$$

Ak $G^* \subset \Omega^*$ je merateľná uzavretá oblasť v \mathbb{R}^3 a funkcia $f(x, y, z)$ je spojitá na uzavretej oblasti $G = \phi(G^*)$, potom podľa Vety 3 platí:

$$\begin{aligned}
 &\iiint_G f(x, y, z) \, dx dy dz = \\
 &= \iiint_{G^*} f(\varrho \cdot \cos \varphi \cdot \sin \vartheta, \varrho \cdot \sin \varphi \cdot \sin \vartheta, \varrho \cdot \cos \vartheta) \cdot \varrho^2 \sin \vartheta \, d\varrho d\varphi d\vartheta.
 \end{aligned}$$

Sférické súradnice môžu byť zadané rovnicami

$$x = \varrho \cdot \cos \varphi \cdot \cos \vartheta$$

$$y = \varrho \cdot \sin \varphi \cdot \cos \vartheta$$

$$z = \varrho \cdot \sin \vartheta,$$

kde $0 \leq \varrho < +\infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2$. Potom $J(\varrho, \varphi, \vartheta) = \varrho^2 \cdot \cos \vartheta$.

Zovšeobecnené sférické súradnice:

$$x = a \cdot \varrho \cdot \cos \varphi \cdot \sin \vartheta$$

$$y = b \cdot \varrho \cdot \sin \varphi \cdot \sin \vartheta$$

$$z = c \cdot \varrho \cdot \cos \vartheta.$$

Dá sa dokázať, že toto zobrazenie je prosté a regulárne. Pre Jakobián platí:

$$J(\varrho, \varphi, \vartheta) = -abc \cdot \varrho^2 \cdot \sin \vartheta.$$

Aplikácie trojného integrálu.

Objem telies.

Nech G je merateľná uzavretá oblasť v \mathbb{R}^3 . Potom pre jej objem platí:

$$V = \iiint_G dx dy dz.$$

Hmotnosť telesa.

Nech G je merateľná uzavretá oblasť v \mathbb{R}^3 a nech jej hustota je $h(x, y, z)$. Potom pre jej hmotnosť platí:

$$m = \iiint_G h(x, y, z) \, dx dy dz.$$

Statické momenty telesa, ťažisko.

Nech $G \subset \mathbb{R}^3$ je merateľná uzavretá oblasť, $h(x, y, z)$ je jej hustota. Potom pre statické momenty oblasti G platí:

$$S_{xy} = \iiint_G h(x, y, z) \cdot z \, dx dy dz$$

$$S_{xz} = \iiint_G h(x, y, z) \cdot y \, dx dy dz$$

$$S_{yz} = \iiint_G h(x, y, z) \cdot x \, dx dy dz$$

a pre súradnice ťažiska $T = [x_T, y_T, z_T]$ platí:

$$x_T = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_T = \frac{S_{xz}}{m}, \quad z_T = \frac{S_{xy}}{m}.$$

Momenty zotrvačnosti telesa.

Nech $G \subset \mathbb{R}^3$ je merateľná uzavretá oblasť, $h(x, y, z)$ je jej hustota. Potom pre momenty zotrvačnosti oblasti G vzhľadom na súradnicové roviny platia vzťahy:

$$I_{xy} = \iiint_G h(x, y, z) \cdot z^2 \, dx dy dz$$

$$I_{xz} = \iiint_G h(x, y, z) \cdot y^2 \, dx dy dz$$

$$I_{yz} = \iiint_G h(x, y, z) \cdot x^2 \, dx dy dz.$$

Pre momenty zotrvačnosti oblasti G vzhľadom na súradnicové osi platí:

$$I_x = I_{xy} + I_{xz} = \iiint_G h(x, y, z) \cdot (y^2 + z^2) \, dx dy dz$$

$$I_y = I_{xy} + I_{yz} = \iiint_G h(x, y, z) \cdot (x^2 + z^2) \, dx dy dz$$

$$I_z = I_{xz} + I_{yz} = \iiint_G h(x, y, z) \cdot (x^2 + y^2) \, dx dy dz.$$