Nájdite lokálne extrémy funkcie

$$z = \frac{ax + by + c}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$$

Riešenie.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a \cdot \sqrt{1 + x^2 + y^2} - (ax + by + c) \cdot \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}}{1 + x^2 + y^2}$$
$$= \frac{a \cdot (1 + x^2 + y^2) - x \cdot (ax + by + c)}{(1 + x^2 + y^2) \cdot \sqrt{1 + x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{b \cdot \sqrt{1 + x^2 + y^2} - (ax + by + c) \cdot \dfrac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}}{1 + x^2 + y^2}$$
$$= \frac{b \cdot (1 + x^2 + y^2) - y \cdot (ax + by + c)}{(1 + x^2 + y^2) \cdot \sqrt{1 + x^2 + y^2}}$$

$$a \cdot (1 + x^2 + y^2) - x \cdot (ax + by + c) = 0$$
$$b \cdot (1 + x^2 + y^2) - y \cdot (ax + by + c) = 0$$

$$a \cdot (1 + x^2 + y^2) = x \cdot (ax + by + c) \tag{1}$$
$$b \cdot (1 + x^2 + y^2) = y \cdot (ax + by + c) \tag{2}$$

Zrejme $1 + x^2 + y^2 \neq 0$ pre každú dvojicu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Rozlíšime niekoľko prípadov:

a) Predpokladajme, že $a = b = 0$. Potom sústava rovníc (1) a (2) má tvar

$$0 = cx$$
$$0 = cy$$

Ak $c = 0$, tejto sústave vyhovuje každá dvojica $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Ak $c \neq 0$, táto sústava má jediné riešenie $(x, y) = (0, 0)$.

b) Predpokladajme, že $a \neq 0$. Potom z rovníc (1) a (2) dostávame

$$\frac{b \cdot (1 + x^2 + y^2)}{a \cdot (1 + x^2 + y^2)} = \frac{y \cdot (ax + by + c)}{x \cdot (ax + by + c)}$$

odkiaľ

$$y = \frac{bx}{a} \tag{3}$$

Po dosadení (3) do rovnice (1) máme

$$a \cdot \left(1 + x^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2\right) = x \cdot \left(ax + b \cdot \frac{bx}{a} + c\right)$$

$$a + ax^2 + a \cdot \left(\frac{bx}{a}\right)^2 = ax^2 + bx \cdot \frac{bx}{a} + cx$$

$$a = cx \tag{4}$$

Ak $c = 0$, rovnica (4) nemá riešenie. Ak $c \neq 0$, rovnica (4) má koreň

$$x = \frac{a}{c} \tag{5}$$

Po dosadení (5) do (3) dostávame

$$y = \frac{b}{c}$$

c) Predpokladajme, že $b \neq 0$. Potom z rovníc (1) a (2) dostávame

$$\frac{a \cdot (1 + x^2 + y^2)}{b \cdot (1 + x^2 + y^2)} = \frac{x \cdot (ax + by + c)}{y \cdot (ax + by + c)}$$

odkiaľ

$$x = \frac{ay}{b} \tag{6}$$

Po dosadení (6) do rovnice (2) máme

$$b \cdot \left(1 + \left(\frac{ay}{b}\right)^2 + y^2\right) = y \cdot \left(a \cdot \frac{ay}{b} + by + c\right)$$

$$b + b \cdot \left(\frac{ay}{b}\right)^2 + by^2 = ay \cdot \frac{ay}{b} + by^2 + cy$$

$$b = cy \tag{7}$$

Ak $c = 0$, rovnica (7) nemá riešenie. Ak $c \neq 0$, rovnica (7) má koreň

$$y = \frac{b}{c} \tag{8}$$

Po dosadení (8) do (6) dostávame

$$x = \frac{a}{c}$$

Teraz zhrnieme dosiahnuté výsledky pre sústavu rovníc (1) a (2):

(i) Ak $a = b = c = 0$, potom riešením sústavy rovníc (1) a (2) je každá dvojica $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Ak $c \neq 0$, potom sústava rovníc (1) a (2) má jediné riešenie

$$(x, y) = \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right).$$

(iii) Sústava rovníc (1) a (2) nemá žiadne riešenie v $\mathbb{R}^2$ pre všetky ostatné hodnoty parametrov a, b, c.

V prípade (i) je funkcia z konštantná na $\mathbb{R}^2$, teda ostré lokálne extrémy nemá. V každom bode $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ má zrejme neostré lokálne maximum, aj neostré lokálne minimum.

V prípade (ii) máme preskúmať stacionárny bod

$$A = \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right).$$

Pretože

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(A) & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(A) \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(A) & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(A) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\dfrac{b^2 + c^2}{c \cdot \left(1 + \dfrac{a^2}{c^2} + \dfrac{b^2}{c^2}\right)^{3/2}} & \dfrac{ab}{c \cdot \left(1 + \dfrac{a^2}{c^2} + \dfrac{b^2}{c^2}\right)^{3/2}} \\ \dfrac{ab}{c \cdot \left(1 + \dfrac{a^2}{c^2} + \dfrac{b^2}{c^2}\right)^{3/2}} & -\dfrac{a^2 + c^2}{c \cdot \left(1 + \dfrac{a^2}{c^2} + \dfrac{b^2}{c^2}\right)^{3/2}} \end{vmatrix} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\left(1 + \dfrac{a^2}{c^2} + \dfrac{b^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

zrejme

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(A) & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(A) \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(A) & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(A) \end{vmatrix} > 0$$

Pritom znamienko parciálnej derivácie

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(A) = -\frac{b^2 + c^2}{c \cdot \left(1 + \dfrac{a^2}{c^2} + \dfrac{b^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

je určené znamienkom parametra c.

Ak $c > 0$, máme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(A) < 0$$

a teda funkcia z má v bode A ostré lokálne maximum.

Ak $c < 0$, máme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(A) > 0$$

a teda funkcia z má v bode A ostré lokálne minimum.

V prípade (iii) funkcia z lokálne extrémy nemá.