

Lenka Šilarová, *Komplexní čísla ve výuce matematiky na střední škole s využitím internetu*,
diplomová práce MFF UK Praha, 2006.

*Komplexní čísla jsou abstraktním oborem, ve kterém je definována
odmocnina z každého čísla.*

KOMPLEXNÉ ČÍSLA

Komplexné číslo je matematický objekt, ktorý je určený usporiadanou dvojicou reálnych čísel (a, b) . Prirodzenou požiadavkou je, aby každé reálne číslo bolo zároveň komplexným číslom. Z tohto dôvodu za matematický objekt určený usporiadanou dvojicou $(a, 0)$ prehlásime reálne číslo a .

Komplexné číslo určené usporiadanou dvojicou $(0, 1)$ označujeme symbolom i . Číslo z , ktoré je určené usporiadanou dvojicou (a, b) , vyjadrujeme v algebraickom tvare

$$z = a + b \cdot i.$$

Ak z_1 je komplexné číslo určené usporiadanou dvojicou (a, b) a ak z_2 je komplexné číslo určené usporiadanou dvojicou (c, d) , potom

$$z_1 + z_2 = (a + b \cdot i) + (c + d \cdot i) = (a + c) + (b + d) \cdot i.$$

Teda $z_1 + z_2$ je komplexné číslo určené usporiadanou dvojicou $(a + c, b + d)$.

Ak z je komplexné číslo určené usporiadanou dvojicou (a, b) a ak r je reálne číslo, potom

$$rz = r(a + b \cdot i) = (ra) + (rb) \cdot i.$$

Teda rz je komplexné číslo určené usporiadanou dvojicou (ra, rb) .

Násobenie komplexných čísel definujeme takým spôsobom, aby číslo i bolo koreňom rovnice $z^2 = -1$. Ak z_1 je komplexné číslo určené usporiadanou dvojicou (a, b) a ak z_2 je komplexné číslo určené usporiadanou dvojicou (c, d) , potom

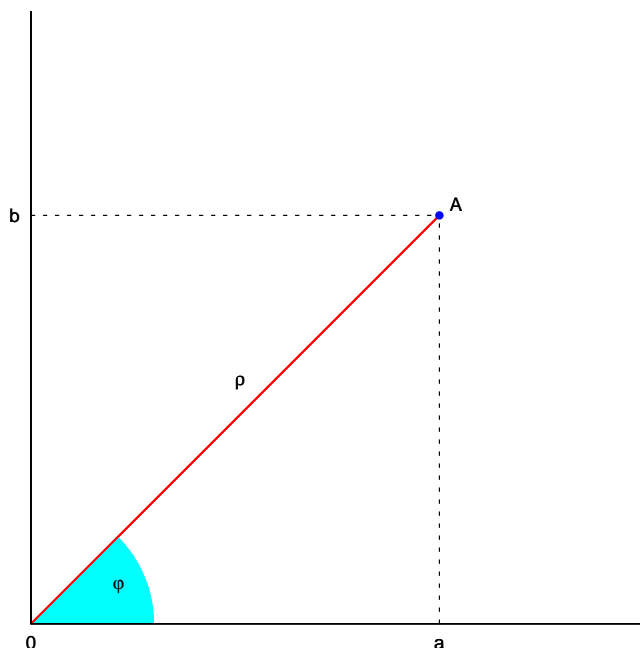
$$z_1 z_2 = (a + b \cdot i)(c + d \cdot i) = ac + bc \cdot i + ad \cdot i + bd \cdot i^2 = (ac - bd) + (bc + ad) \cdot i.$$

Teda $z_1 z_2$ je komplexné číslo určené usporiadanou dvojicou $(ac - bd, bc + ad)$.

Bod $A = (a, b)$ v rovine je znázornením komplexného čísla, ktoré je určené usporiadanou dvojicou (a, b) .

Absolútna hodnota komplexného čísla z určeného usporiadanou dvojicou (a, b) je reálne číslo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Pre komplexné číslo $z \neq 0$ platí

$$a = |z| \cos \varphi, \quad b = |z| \sin \varphi.$$



Zápis nenulového komplexného čísla $z = a + b \cdot i$ v tvare

$$z = |z| \cos \varphi + |z| \sin \varphi \cdot i$$

sa volá goniometrický tvar komplexného čísla.

Matematickou indukciou sa dá ukázať, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$z^n = |z|^n \cos n\varphi + |z|^n \sin n\varphi \cdot i.$$

Na záver sa budeme zaoberať špeciálnym typom rovníc v obore komplexných čísel, konkrétne binomických rovníc. Ide o rovnice tvaru

$$z^n = a,$$

kde a je dané komplexné číslo, z je neznáma a $n > 1$ je prirodzené číslo.

Pre $a = 0$ má táto rovnica zrejme jediné riešenie $z = 0$. V ďalšom budeme predpokladať, že $a \neq 0$. Tento predpoklad nám umožní vyjadriť číslo a v goniometrickom tvare

$$a = |a| \cos \alpha + |a| \sin \alpha \cdot i.$$

Ak komplexné číslo $z = |z| \cos \varphi + |z| \sin \varphi \cdot i$ je riešením rovnice $z^n = a$, potom danú binomickú rovnicu môžeme prepísať do tvaru

$$|z|^n \cos n\varphi + |z|^n \sin n\varphi \cdot i = |a| \cos \alpha + |a| \sin \alpha \cdot i.$$

Odtiaľ priamo vidíme, že komplexné číslo

$$z = \sqrt[n]{|a|} \cos \frac{\alpha}{n} + \sqrt[n]{|a|} \sin \frac{\alpha}{n} \cdot i$$

je riešením danej binomickej rovnice.¹⁾

¹⁾ Všetky riešenia sú

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + \sqrt[n]{|a|} \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \cdot i, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$