

VÝPOČET LIMITY FUNKCIE DVOCH PREMENNÝCH

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y)$$

1. Ak sa dá, vypočítame $f(a, b)$. Žiadne delenie nulou, odmocňovanie záporných čísel, a pod.

Nie?

↓

Áno? ⇒

Limita existuje a rovná sa $f(a, b)$, čo vyplýva zo spojitosti a vlastností limity.

Príklad: $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{x^3}$

2. Vhodnou substitúciou možno previesť danú limitu na limitu funkcie jednej premennej, ktorú vieme vypočítať.

Nie?

↓

Áno? ⇒

Limita existuje. Príklady:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2}, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^2 y} - 1}{x^2 y}$$

3. Vypočítame limitu po priamkach $x = a$, ako aj $y = k(x - a) + b$, kde k je reálny parameter. Dostaneme rôzne hodnoty?

Nie?

↓

Áno? ⇒

Limita neexistuje. Príklady:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow -1}} \frac{1 - xy}{1 + xy}, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

4. Použijeme polárne súradnice (pre $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$). Zjednoduší sa tým limita?

Nie?

↓

Áno? ⇒

Ak ide o súčin dvoch činiteľov, pričom jeden obsahuje iba θ a je ohraničený, druhý obsahuje iba r a konverguje k nule pre $r \rightarrow 0+$, potom limita existuje. Príklady:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Je možné nájsť nejaké krivky (napr. $y = x^2, y = x^3$ a pod.), pozdĺž ktorých majú limity rôzne hodnoty?

Nie?

↓

Áno? ⇒

Limita neexistuje. Príklady:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{y}, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$$

6. Pokúste sa použiť definíciu limity.