(2.37.1)
$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3-y}{x^3+y}}$$

a) Veľmi stručne:

$$f(x,y)=\frac{x^3-y}{x^3+y} \qquad f(x,0)=1 \qquad f(0,y)=-1 \qquad \Rightarrow \text{ neexistuje}$$

Teraz si to vysvetlíme. Použili sme túto vlastnosť limity:

Ak $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ *existuje, potom pre každú krivku* K *prechádzajúcu bodom* (x_0,y_0)*, pričom každý bod tejto krivky* $(x,y)\neq(x_0,y_0)$ *leží v definičnom obore danej funkcie, platí*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0\\ (x,y)\in K}} f(x,y).$$

Za krivku K vezmeme priamku určenú rovnicou $y=0$. Zrejme táto krivka prechádza bodom $(x_0,y_0)=(0,0)$. Nech $(x,y)\neq(0,0)$ je ľubovoľný bod krivky K. Z rovnice krivky K dostávame $y=0$. Pretože $(x,y)\neq(0,0)$, musí platiť $x\neq 0$. Potom ale $x^3+y=x^3+0\neq 0$, čím sme ukázali, že bod (x,y) leží v definičnom obore danej funkcie. Ak teda daná limita existuje, musí platiť

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3-y}{x^3+y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in K}} \frac{x^3-y}{x^3+y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x^3-y}{x^3+y} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3-0}{x^3+0} = 1.$$

Podobne postupujeme pre krivku L určenú rovnicou $x=0$. Zrejme táto krivka prechádza bodom $(x_0,y_0)=(0,0)$. Nech $(x,y)\neq(0,0)$ je ľubovoľný bod krivky L. Z rovnice krivky L dostávame $x=0$. Pretože $(x,y)\neq(0,0)$, musí platiť $y\neq 0$. Potom ale $x^3+y=0^3+y\neq 0$, čím sme ukázali, že bod (x,y) leží v definičnom obore danej funkcie. Ak teda daná limita existuje, musí platiť

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3-y}{x^3+y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in L}} \frac{x^3-y}{x^3+y} = \lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \frac{x^3-y}{x^3+y} = \lim_{y\to 0} \frac{0^3-y}{0^3+y} = -1.$$

Ukázali sme, že ak by limita (2.37.1) existovala, musela by sa rovnať dvom rôznym číslam (číslu jedna, aj číslu mínus jedna). Pretože limita je určená jednoznačne, takáto situácia nemôže nastať. Odtiaľ vyplýva, že limita (2.37.1) neexistuje.

b) Alebo použijeme túto vlastnosť limity:

Ak $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ *existuje, potom pre každú postupnosť bodov* (x_n, y_n)*, že*

$$\lim_{n \to \infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0),$$

pričom každý bod (x_n, y_n) *patrí do definičného oboru danej funkcie, platí*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n).$$

Pre každé prirodzené číslo n položme

$$(x_n, y_n) = \left(\tfrac{1}{n}, 0\right).$$

Potom $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n, y_n) = (0, 0)$, všetky body (x_n, y_n) ležia v definičnom obore danej funkcie, pričom platí:

$$f(x_n, y_n) = f(\tfrac{1}{n}, 0) = 1.$$

Odtiaľ vyplýva, že ak limita (2.37.1) existuje, musí sa rovnať číslu

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = 1.$$

Podobne pre

$$(u_n, v_n) = \left(0, \tfrac{1}{n}\right)$$

máme $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n, v_n) = (0, 0)$, všetky body (u_n, v_n) ležia v definičnom obore danej funkcie, pričom platí:

$$f(u_n, v_n) = f(0, \tfrac{1}{n}) = -1.$$

Odtiaľ vyplýva, že ak limita (2.37.1) existuje, musí sa rovnať číslu

$$\lim_{n \to \infty} f(u_n, v_n) = -1.$$

Ukázali sme, že ak by limita (2.37.1) existovala, musela by sa rovnať dvom rôznym číslam (číslu jedna, aj číslu mínus jedna). Pretože limita je určená jednoznačne, takáto situácia nemôže nastať. Odtiaľ vyplýva, že limita (2.37.1) neexistuje.

(2.37.3)

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y^2-x^2}{y^2+x^2}}$$

Veľmi stručne:

$$f(x,y)=\frac{y^2-x^2}{y^2+x^2} \qquad f(x,0)=-1 \qquad f(0,y)=1 \qquad \Rightarrow \text{ neexistuje}$$

(2.37.2)

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}}$$

Veľmi stručne:

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2} \qquad f(x,0)=0 \qquad f(x,x)=\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \text{ neexistuje}$$

(2.37.5)

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y^2x^2}{x^2y^2+(x-y)^2}}$$

Veľmi stručne:

$$f(x,y)=\frac{y^2x^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \qquad f(x,0)=0 \qquad f(x,x)=1 \qquad \Rightarrow \text{ neexistuje}$$

(2.37.10)

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \log_{1+x}(1+x+y)}$$

Veľmi stručne:

$$f(x,y)=\log_{1+x}(1+x+y) \qquad f(x,0)=1 \qquad f(x,-x)=0 \qquad \Rightarrow \text{ neexistuje}$$

(2.40.3) $$\boxed{\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \sin\frac{\pi y^2}{x^2+3y^2}}$$

Veľmi stručne:

$$f(x,y)=\sin\frac{\pi y^2}{x^2+3y^2} \qquad f(x,x)=\sin\frac{\pi}{4} \qquad f(3x,x)=\sin\frac{\pi}{12} \qquad \Rightarrow \text{ neexistuje}$$

(2.40.2) $$\boxed{\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x^3+xy^2}{x^2+y^4}}$$

Veľmi stručne:

$$f(x,y)=\frac{x^3+xy^2}{x^2+y^4} \qquad f(x,x)=\frac{2x}{1+x^2} \qquad f(x^2,x)=\frac{x^2+1}{2} \qquad \Rightarrow \text{ neexistuje}$$

(2.40.1) $$\boxed{\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^3}}$$

Veľmi stručne:

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^3} \qquad f(x,x)=\frac{2}{1+x} \qquad f(x^3,x^2)=\frac{x^2+1}{2x^2} \qquad \Rightarrow \text{ neexistuje}$$

(2.37.9) $$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y}{x}\tan\frac{x}{x+y}}$$

$$f(x,y)=\frac{y}{x}\tan\frac{x}{x+y}$$

$$f(x,x)=\tan\frac{1}{2}\doteq 0.546302 \qquad f(x,2x)=2\tan\frac{1}{3}\doteq 0.692507 \qquad \Rightarrow \text{ neexistuje}$$

(2.37.4)
$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y+xy^2}{x^2-xy+y^2} = 0}$$

Funkciu $f(x,y)$ vyjadríme v tvre súčinu dvoch funkcií, z ktorých jedna má limitu nula a druhá je ohraničená:

$$f(x,y) = \frac{x^2y+xy^2}{x^2-xy+y^2} = \frac{xy(x+y)}{x^2-xy+y^2} = (x+y)\underbrace{\frac{xy}{x^2-xy+y^2}}_{\text{ohraničená}}$$

Pretože funkcia $g(x,y) = x+y$ je spojitá, jej limita sa rovná jej hodnote v bode $(0,0)$, čiže

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} g(x,y) = g(0,0) = 0.$$

Teraz ukážeme, že funkcia $h(x,y) = \dfrac{xy}{x^2-xy+y^2}$ je ohraničená. Pretože

$$2(x^2-xy+y^2) = 2x^2-2xy+2y^2 = x^2+x^2-2xy+y^2+y^2 = x^2+(x-y)^2+y^2,$$

výraz v menovateli funkcie h nemôže byť záporný. Tiež odtiaľ vyplýva, že funkcia h je definovaná pre každé $(x,y) \neq (0,0)$. Všimnime si, že pre každé $x \neq 0$ platí:

$$h(x,x) = 1, \qquad h(x,-x) = -\frac{1}{3}.$$

Ukážeme, že pre každé $(x,y) \neq (0,0)$ platí: $-\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{xy}{x^2-xy+y^2} \leq 1$.

Pretože $x^2-xy+y^2 > 0$, nasledujúce úpravy sú ekvivalentné:

$$\begin{gathered} \frac{xy}{x^2-xy+y^2} \leq 1 \\ xy \leq x^2-xy+y^2 \\ 0 \leq x^2-2xy+y^2 \\ 0 \leq (x-y)^2 \end{gathered}$$

Z toho istého dôvodu sú aj nasledujúce úpravy ekvivalentné:

$$\begin{gathered} -\frac{1}{3} \leq \frac{xy}{x^2-xy+y^2} \\ -x^2+xy-y^2 \leq 3xy \\ 0 \leq x^2+2xy+y^2 \\ 0 \leq (x+y)^2 \end{gathered}$$

Tým je ohraničenosť funkcie h dokázaná.

(2.37.6)
$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^8+x^5+x^4+y^4+y^5-y^8}{x^4+y^4} = 1}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) = \frac{x^8+x^5+x^4+y^4+y^5-y^8}{x^4+y^4} &= \frac{x^8-y^8}{x^4+y^4} + \frac{x^5+y^5}{x^4+y^4} + 1 = \\ &= x^4-y^4+(x+y)\frac{x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4}{x^4+y^4} + 1 \end{aligned}$$

$$g(x,y) = \frac{x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4}{x^4+y^4} \qquad g(x,x) = \frac{1}{2} \qquad g(x,-x) = \frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{2} \le g(x,y) \le \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4}{x^4+y^4} &\le \frac{10}{4} \\ 4x^4-4x^3y+4x^2y^2-4xy^3+4y^4 &\le 10x^4+10y^4 \\ 0 &\le 6x^4+4x^3y-4x^2y^2+4xy^3+6y^4 \\ 0 &\le (x+y)^4+5(x^2-y^2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{4} &\le \frac{x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4}{x^4+y^4} \\ 2x^4+2y^4 &\le 4x^4-4x^3y+4x^2y^2-4xy^3+4y^4 \\ 0 &\le 2x^4-4x^3y+4x^2y^2-4xy^3+2y^4 \\ 0 &\le (x-y)^4+(x^2+y^2)^2 \end{aligned}$$

(2.37.7)
$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x + y\sin\frac{1}{x}\right) = 0}$$

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$$

(2.37.8)
$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}\right) = 0}$$

$$\left|\sin\frac{1}{y}\right| \le 1 \qquad \left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$$