Vstupná písomka

1) Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$, kde $a_n = \dfrac{1}{n\ln^2 n}$.

2) Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{10^{\ln n}}$.

3) Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.

4) Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

5) Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$.

6) Vypočítajte $y'(\frac{\pi}{4})$, ak $y = \ln(\ln(\sin x))$.

7) Vypočítajte $\displaystyle\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}\,dx$.

8) Vypočítajte $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx$.

Malé písomky 07/08

1) Predpokladajme, že rad s nezápornými členmi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Vyplýva odtiaľ, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ tiež konverguje?

2) Vyšetrite konvergenciu radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{-1}\right)^{-n}$.

3) Nájdite súčet radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1}\,)(1+\sqrt{2}\,)(1+\sqrt{3}\,)\cdots(1+\sqrt{n}\,)}$.

4) Predpokladajme, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Vyplýva odtiaľ, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ tiež konverguje?

5) Určte a nakreslite definičný obor funkcie

$$f(x,y) = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+y}}}{1+\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}}.$$

Potom daný predpis zjednodušte.

6) Nasledujúce tvrdenie dokážte pomocou ε-δ definície limity:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} \right) = 0.$$

7) Vypočítajte $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x+y}$.

8 Nájdite lokálne extrémy funkcie $f(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^y$.