1. Ukážte, že neprázdny systém $\mathscr{R}$ podmnožín množiny X je okruh práve vtedy, keď sú splnené obidve nasledujúce podmienky:

(i) $A, B \in \mathscr{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{R}$;

(ii) $A, B \in \mathscr{R} \Rightarrow A \triangle B \in \mathscr{R}$, kde $A \triangle B$ je symetrická diferencia množín, t. j. $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$.

2. Nech $\mathscr{S}$ je nejaký systém podmnožín množiny X. Nech $\mathscr{F}$ je nejaká σ-algebra podmnožín množiny X. Ukážte, že $\mathscr{S} \subset \mathscr{F}$ práve vtedy, keď $\mathscr{A}_\sigma(\mathscr{S}) \subset \mathscr{F}$.

3. Nech $X = (0, 1\rangle$, $\mathscr{S} = \{(a, b\rangle : 0 \leq a < b \leq 1\}$. Definujme funkciu μ takto:

$$\mu((a, b\rangle) = \begin{cases} b - a & \text{ak } a \neq 0, \\ +\infty & \text{ak } a = 0. \end{cases}$$

Rozšírte funkciu μ na $\mathscr{E}(\mathscr{S})$ tak, aby bola aditívna. Bude aj σ-aditívna?

4. Nech μ^* je vonkajšia miera. Ak $\mu^*(E \triangle F) = 0$, potom $\mu^*(E) = \mu^*(F)$. Dokážte!

5. Nech $\mathscr{R}$ je okruh a μ je miera na $\mathscr{R}$. Nech $A_n \in \mathscr{R}$ $(n = 1, 2, \dots)$. Ukážte, že platí

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \liminf_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

1. Ukážte, že každá monotónna funkcia je borelovsky merateľná.

2. Let $S = (0, 1)$. Give an example of bounded measurable functions f_n on S so that $\int_S f_n \, d\mu = 1$ for all n and $f_n(x) \to 0$ for all $x \in S$.

3. Nech $X = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathscr{S}$ je systém všetkých podmnožín množiny X a μ miera definovaná tak, že $\mu(E) =$ počet prvkov množiny E. Opíšte všetky nezáporné integrovateľné funkcie.

4. Ak $(X, \mathscr{S}, \mu)$ je taký priestor s mierou, že $X \in \mathscr{S}$, $\mu(X) < \infty$ a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť integrovateľných funkcií, ktorá rovnomerne konverguje k funkcii f, potom f je integrovateľná a platí $\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu$. Dokážte.

5. Ak f je taká merateľná funkcia, že $\int_E f \, d\mu = 0$ pre každú množinu $E \in \mathscr{S}$, potom $f = 0$ skoro všade. Dokážte.

1. Nech $A_1 = \emptyset$, $A_2 = \langle 0,1)$, $A_3 = \langle 0,2)$, $A_4 = \langle 1,3)$, $A_5 = \langle 0,3)$, $A_6 = \langle 0,4)$. Zistite, či systém $\mathscr{Z} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ podmnožín množiny $X = \langle 0,4)$ je q-okruh. Nájdite najmenší okruh nad systémom $\mathscr{Z}$.

2. Nech $\mathscr{Z}$ je systém z príkladu 1. Definujme funkciu $\mu : \mathscr{Z} \to (-\infty, \infty)$ nasledujúcim spôsobom: $\mu(A_1) = 0$, $\mu(A_2) = \mu(A_3) = \mu(A_4) = 2$ a $\mu(A_5) = \mu(A_6) = 4$. Zistite, či funkcia μ je na $\mathscr{Z}$ aditívna. Zistite, či existuje jej aditívne rozšírenie na $\mathscr{E}(\mathscr{Z})$.

3. Nech $X = \mathbb{N}$. Definujme množinovú funkciu μ nasledujúcim spôsobom: Ak $E \subset X$ je konečná, položme $\mu(E) = \frac{n}{n+1}$, kde n je počet prvkov množiny E. Ak $E \subset X$ je nekonečná, položme $\mu(E) = 1$. Nájdite všetky μ-merateľné množiny.

4. Nech μ^* je vonkajšia miera. Nech $E \subset X$. Predpokladajme, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje μ^*-merateľná množina $F \subset E$ taká, že $\mu^*(E - F) < \varepsilon$. Dokážte, že množina E je μ^*-merateľná.

5. Nech $\mathscr{R}$ je okruh a μ je miera na $\mathscr{R}$. Nech $A_n \in \mathscr{R}$ $(n = 1, 2, \dots)$ sú také, že $\mu\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big) < \infty$. Ukážte, že platí

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n).$$