PRVÁ

1. Nech $f : X \to Y$ je injektívne lineárne zobrazenie. Ak A je množina lineárne nezávislých prvkov v X, potom $f(A)$ je množina lineárne nezávislých prvkov v Y. Dokážte.

2. Nech $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Vypočítajte $\lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p$.

3. Pre $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ položme $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2 - xy}$. Zistite, či je to norma.

4. Nech m je priestor všetkých ohraničených postupností reálnych čísel. Nech c_0 je priestor všetkých nulových postupností reálnych čísel, t. j. takých, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Definujme zobrazenie $f : m \to c_0$ predpisom $f(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{\frac{1}{n} a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Zistite, či f je lineárne, či je injektívne, či je surjektívne.

5. Nech X je lineárny priestor a P jeho lineárny podpriestor. Dokážte, že platí $\dim X = \dim P + \dim X/_P$.

DRUHÁ

1. Nech X je lineárny priestor a A je konvexná množina. Bod $a \in A$ nazývame extrémnym bodom množiny A vtedy a len vtedy, keď pre každé také $x, y \in A$, že $a = \frac{1}{2}(x + y)$, platí $a = x = y$. Nech $E(A)$ je množina všetkých extrémnych bodov množiny A. Bod $a \in E(A)$ práve vtedy, keď $A - \{a\}$ je konvexná. Dokážte.

2. Nech $(X, \|\cdot\|)$ je lineárny priestor a P je jeho vlastný uzavretý lineárny podpriestor. Nech $0 < a < 1$. Potom existuje také $x_a \in X$, že $\|x_a\| = 1$ a $\|x - x_a\| > a$ pre každé $x \in P$. Dokážte.

3. Ak $f : \langle a, b\rangle \to (-\infty, \infty)$ je funkcia s ohraničenou variáciou na $\langle a, b\rangle$ a $c \in (a, b)$, potom f je s ohraničenou variáciou aj na $\langle a, c\rangle$. Dokážte.

4. Ukážte, že $L_\infty(S, \Sigma, m)$ pre prípad $S = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\Sigma = 2^S$, a $m(A) = \operatorname{card} A$, ak $A \in \Sigma$ je konečná a $m(A) = \infty$, ak $A \in \Sigma$ je nekonečná, sa zhoduje s priestorom m všetkých ohraničených postupností a $\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\| = \sup\{|x_n| : n = 1, 2, 3, \dots\}$ pre $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in m$.

5. Dokážte, že f je spojitý lineárny funkcionál na ℓ_1 vtedy a len vtedy, keď existuje taká postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$, že $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ pre každé $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$.