

PLOŠNÉ INTEGRÁLY

(J. L. Lagrange, 1788)

PLOCHY

Plochou budeme nazývať hodograf vektorovej funkcie \vec{r} dvoch premenných u, v , ktorá má tieto vlastnosti:

- 1) jej definičný obor je súvislá množina $G \subset E_2$;
- 2) je spojitá na množine G ;
- 3) existuje taký rozklad $\{G_k\}_k$ množiny G , že na množine $\bigcup_k \underline{G}_k$ je prostá.

Špeciálne, ak je funkcia \vec{r} prostá na celej množine G , hovoríme o *jednoduchej ploche*. Ohraničenú uzavretú oblasť $G \subset E_2$ budeme nazývať *regulárnou oblasťou* v E_2 , ak jej hranica je zjednotením konečného počtu navzájom disjunktných jednoduchých

uzavretých po častiach hladkých kriviek. Ak k je počet týchto kriviek, hovoríme, že G je k -násobne súvislá. Ak $k = 1$, hovoríme, že G je *jednoducho súvislá* oblasť. Vektorová funkcia \vec{r} , ktorej hodografom je plocha S , sa nazýva *parametrické vyjadrenie* plochy S . Rovnica

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad [u, v] \in G,$$

sa volá *parametrická rovnica* plochy S .

Plochu, ktorej obor parametrov G je jednoducho súvislá regulárna oblasť, budeme nazývať *elementárna plocha* alebo *list*. Ak táto plocha je okrem toho jednoduchá, budeme ju volať *jednoduchý list*.

Názorne si môžeme predstaviť, že jednoduchý list vznikne spojitou deformáciou rovinnej elastickej doštičky.

Nech existuje taký konečný rozklad $\{G_k\}_k$ oblasti G , že každá z množín G_k je ohraničená jednoduchou uzavretou po častiach hladkou krivkou a nech ľubovoľné dve z nich majú spoločný iba oblúk alebo jeden bod alebo žiaden bod. Ak je plocha S parametrizovaná rovnicou

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad [u, v] \in G,$$

a táto funkcia má spojité parciálne derivácie na G_k , ktoré sú lineárne nezávislé, hovoríme, že plocha S je *po kúskoch hladká*.

Ak príslušné parciálne derivácie sú spojité na G a sú lineárne nezávislé, hovoríme, že plocha S je *hladká* alebo *regulárna*.

PLOŠNÝ INTEGRÁL PRVÉHO DRUHU

Nech S je jednoduchý regulárny list a $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $[u, v] \in G$ je jeho parametrizácia. Nech f je funkcia troch premenných, ktorá je definovaná a spojitá na S . *Plošný integrál prvého druhu* definujeme vzťahom

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_G f(\vec{r}(u, v)) \cdot |\vec{r}'_u(u, v) \times \vec{r}'_v(u, v)| dudv.$$

Tento integrál nezávisí od orientácie plochy. Definovali sme ho za predpokladu, že S je jednoduchý regulárny list. Túto definíciu možno zovšeobecniť aj na prípad, keď S je po častiach regulárny list. Špeciálne môže byť plocha S aj uzavretá. Potom plošný integrál označujeme

$$\oiint_S f dS.$$

Ak $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v) \cdot \vec{i} + y(u, v) \cdot \vec{j} + z(u, v) \cdot \vec{k}$, potom

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_G f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \sqrt{\left| \begin{matrix} y'_u & x'_u \\ y'_v & x'_v \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{matrix} \right|^2} dudv.$$

Ak ploche S priradíme určitú hmotnosť, hovoríme o *hmotnej ploche*. Pre celkovú hmotnosť m plochy S s hustotou $h = h(x, y, z)$ platí:

$$m = \iint_S h(x, y, z) dS.$$

Statické momenty plochy S vzhľadom na súradnicové roviny sú:

$$S^{xy} = \iint_S z \cdot h(x, y, z) dS, \quad S^{xz} = \iint_S y \cdot h(x, y, z) dS, \quad S^{yz} = \iint_S x \cdot h(x, y, z) dS.$$

Momenty zotrvačnosti vzhľadom na súradnicové osi sú:

$$J_x = \iint_S (y^2 + z^2) \cdot h(x, y, z) dS, \quad J_y = \iint_S (x^2 + z^2) \cdot h(x, y, z) dS, \\ J_z = \iint_S (x^2 + y^2) \cdot h(x, y, z) dS.$$

Súradnice ťažiska sú:

$$x_T = \frac{S^{yz}}{m}, \quad y_T = \frac{S^{xz}}{m}, \quad z_T = \frac{S^{xy}}{m}.$$

ORIENTOVANÉ PLOCHY

Orientovať krivku znamenalo zvoliť jeden z dvoch smerov súvisiacich s touto krivkou, t.j. jeden z možných smerov dotykového vektora. Významný smer na ploche je smer normálového vektora. Tu máme tiež dve možnosti voľby. Keď urobíme túto voľbu, hovoríme, že sme orientovali plochu.

Nech S je po kúskoch hladká plocha daná parametrickým vyjadrením

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad [u, v] \in G.$$

Ak položíme:

$$\vec{n} = (\vec{r}'_u(u, v) \times \vec{r}'_v(u, v))^0,$$

hovoríme, že sme plochu orientovali súhlasne s jej parametrickým vyjadrením. V prípade, že položíme

$$\vec{n} = -(\vec{r}'_u(u, v) \times \vec{r}'_v(u, v))^0,$$

hovoríme, že sme plochu orientovali nesúhlasne s jej parametrickým vyjadrením.

Existujú hladké plochy, ktoré sú neorientovateľné (Möbius, 1858). Na to, aby sme orientovali jednoduchú hladkú plochu, stačí určiť jednotkový normálový vektor v jednom jej bode.

PLOŠNÝ INTEGRÁL DRUHÉHO DRUHU

Nech S je orientovaný jednoduchý regulárny list a \vec{F} spojitá vektorová funkcia troch premenných, ktorej definičný obor obsahuje S . Nech $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $[u, v] \in G$, je parametrizácia plochy S . Potom *plošný integrál druhého druhu* definujeme takto:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \pm \iint_G \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot [\vec{r}'_u(u, v) \times \vec{r}'_v(u, v)] \, dudv,$$

pričom znamienko “+” použijeme v prípade, že plocha S je orientovaná súhlasne s danou parametrizáciou.

Ak $\vec{F}(X) = P(X) \cdot \vec{i} + Q(X) \cdot \vec{j} + R(X) \cdot \vec{k}$, potom:

$$\iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{S} = \pm \iint_G \begin{vmatrix} P(\vec{r}(u, v)) & Q(\vec{r}(u, v)) & R(\vec{r}(u, v)) \\ x'_u(u, v) & y'_u(u, v) & z'_u(u, v) \\ x'_v(u, v) & y'_v(u, v) & z'_v(u, v) \end{vmatrix} dudv.$$

Ak S je grafom funkcie $z = z(x, y)$, $[x, y] \in G$, potom:

$$\iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{S} = \pm \iint_G [-P(x, y, z(x, y)) \cdot z'_x(x, y) - Q(x, y, z(x, y)) \cdot z'_y(x, y) + R(x, y, z(x, y))] dx dy.$$

Množstvo tekutiny, ktoré pretečie orientovanou plochou S za jednotku času možno vypočítať pomocou integrálu

$$\iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{S},$$

kde \vec{F} je vektorové pole rýchlosti prúdenia. Uvedený integrál sa volá *tok* vektorového poľa orientovanou plochou.

INTEGRÁLNA VETA GAUSSOVA

Hovoríme, že jednoduchá uzavretá plocha S je orientovaná tak, že *normála smeruje von*, ak v každom bode A plochy S , v ktorom existuje dotyková rovina, jednotkový normálový vektor $\vec{n}(A)$ je zvolený tak, že žiadny bod tvaru $A + t \cdot \vec{n}(A)$ pre $0 < t < \delta$, kde δ je dosť malé kladné číslo, nepadne do vnútra plochy S .

Gaussova veta. (Gauss, 1813; Ostrogradskij, 1826) Nech $\Omega \subset E_3$ je oblasť a $G \subset \Omega$ je ohraničená oblasť, ktorej hranicou je jednoduchá uzavretá po častiach hladká plocha S orientovaná vonkajším normálovým vektorom. Nech vektorová funkcia \vec{F} troch premenných je definovaná a spojitá na oblasti Ω a má na nej spojité parciálne derivácie prvého rádu. Potom platí:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_G \operatorname{div} \vec{F} \, dx dy dz.$$

Pomocou Gaussovej vety možno odvodiť vzorec na výpočet objemu ohraničenej merateľnej oblasti $G \subset E_3$:

$$\mu(G) = \frac{1}{3} \cdot \oiint_S (x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}) \cdot d\vec{S},$$

kde S je hranica oblasti G orientovaná tak, že normála smeruje von.

INTEGRÁLNA VETA STOKESOVA

Ak pre orientovanú plochu S a jednoduchú uzavretú orientovanú krivku K ležiacu na ploche S platí, že zo smeru jednotkového normálového vektora sa obíehanie po krivke javí proti smeru pohybu hodinových ručičiek, hovoríme, že krivka K je orientovaná súhlasne s plochou S .

Stokesova veta. (1854) *Nech $\Omega \subset E_3$ je oblasť a $S \subset \Omega$ po častiach regulárna orientovaná plocha, ktorej okrajom je uzavretá po častiach regulárna krivka K . Nech krivka K je kladne orientovaná vzhľadom na S . Nech vektorová funkcia \vec{F} a jej parciálne derivácie prvého rádu sú spojité na oblasti Ω . Potom platí:*

$$\oint_K \vec{F}(X) \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F}(X) \cdot d\vec{S}.$$